

# 補足資料

長岡技術科学大学 機械系 平田研二

## 1 はじめに

Computer Exercise 3 に関する補足資料として、ループ整形に基づく制御系設計に関する説明を以下に示す。

## 2 ループ整形にもとづくコントローラ的设计

ここでは、ループ整形にもとづくコントローラ設計の考え方および具体的な手順を概説する。詳細については、制御工学の教科書 [1, 2, 3, 4, 5, 6] などを参考にすること。とくにナイキスト軌跡, ボード線図, ゲイン交差周波数, 位相交差周波数, ゲイン余裕および位相余裕などについては, 十分に理解した上で課題を行うよう努めること。

ループ整形にもとづく制御系設計では, フィードバックループを切断してえられる開ループ伝達関数 (一巡伝達関数)  $L = PC$  に注目する (Fig. 1 参照)。また例として, Fig. 2 に典型的な開ループ特性  $L = PC$  を示しておく。

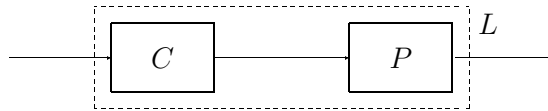


図 1: 開ループ伝達関数  $L = PC$

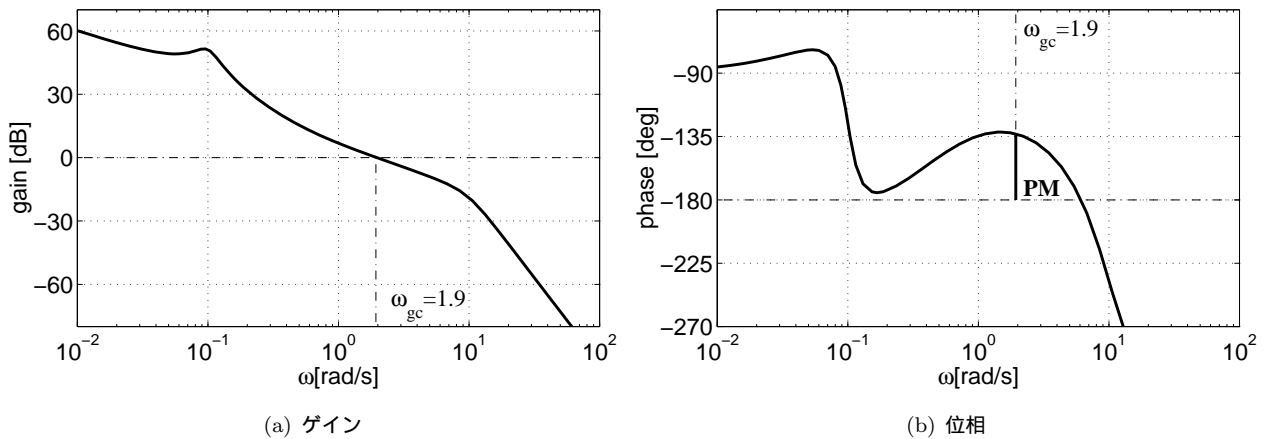


図 2: 開ループ特性の例

ループ整形法では, コントローラ  $C$  として位相遅れ補償 (PI 補償)

$$C(s) = K \left( \frac{T_s + 1}{T_s} \right) \quad (1)$$

および位相進み補償を利用し, 開ループ伝達関数  $L = PC$  の周波数応答を望ましいものに整形 (ループ整形) していく。ループ整形をおこなう際には, つぎのような点に注目する必要がある。まず定常特性 (この課題の場合, ステップ応答において定常偏差が生じないこと) を改善するには, 低周波域での開ループゲインが十分に大きくなければならない (Fig. 2(a) の場合  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$ )。速応性を改善するにはゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  をできるだけ高くとる必要がある (Fig. 2 の場合  $\omega_{gc} = 1.9$  [rad/s])。また応答の振動的な振舞いを避けるには位相余裕 PM を

十分に確保しなければならない (Fig. 2(b) の場合  $PM = 45$  [deg])<sup>1</sup>. まとめて、ループ整形をおこなう際の指標はつぎのようになる<sup>2</sup>.

- 定常特性 : 低周波域の開ループゲイン ( $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$ ) を大きくとる
- 速応性 : ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  をできるだけ高くとる
- 減衰特性 : 位相余裕  $PM$  を十分に確保する

つぎに位相遅れ補償器 (PI 補償器) (1) の設計手順を考える. 位相遅れ補償 (1) は, 比例補償 (P 補償) と同様に, 全体の開ループゲインを  $20 \log K$  [dB] だけ持ち上げ, さらに  $\omega = 1/T$  より低周波では,  $20$  [dB/dec] でゲインを増加させる (Fig 3(a) 参照). よって  $T$  を適切に設定することにより, 低周波ゲインを増加させることが可能である. ところがこの一方, やはり  $\omega = 1/T$  付近から位相の遅れを引き起こしてしまう (Fig. 3(b) 参照). したがって位相遅れ補償器を設計する際には, この位相の遅れが位相余裕  $PM$  を大きく劣化させないように注意を払うことが重要となる.  $K = 10, T = 0.1$  とした場合の  $C(s)$  の特性を Fig. 3 に示す.

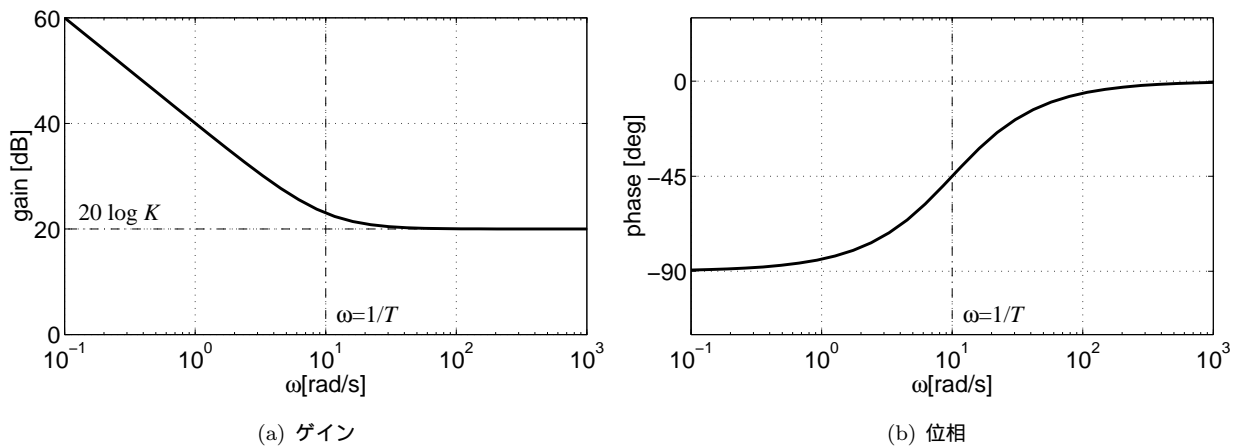


図 3: 位相遅れ補償  $C(s) = K \left( \frac{T_s + 1}{T_s} \right)$ ,  $K = 10, T = 0.1$  のボード線図

Fig. 3 で  $\omega = 1/T = 10$  [rad/s] 付近からゲインが増加していることおよび位相の遅れが生じていることを確認すること. 位相遅れ補償器 (PI 補償器) の設計手順をまとめておく.

- step 1. 位相余裕やゲイン交差周波数に着目し, ゲイン補償  $K$  を決定する. このとき位相余裕を劣化させすぎないように注意する
- step 2. ゲイン  $K$  をもちいて開ループ特性  $L(s) = P(s)K$  のボード線図を描き, その低周波ゲインを評価する
- step 3. 位相遅れにより位相余裕が劣化しすぎないように, ゲインが上がり始める周波数  $\omega = 1/T$  を  $P(s)K$  のゲイン交差周波数より  $1$  [dec] 程度低周波に設定する
- step 4. 位相遅れ補償を  $C(s) = K \left( \frac{T_s + 1}{T_s} \right)$  とする

以下では, 数値例を通して, ループ整形にもとづいたコントローラ (位相遅れ補償) の設計法を解説していく.

<sup>1</sup>サーボ系を構成する場合, 位相余裕は  $PM = 40$  [deg] ~  $60$  [deg] 程度などの指針が知られている. 一方交差周波数については, 位相余裕を損なわない範囲で高くすることになる.

<sup>2</sup>これらの理論的根拠については, 参考文献 [1, 2, 3, 4, 5, 6] などを参照のこと.

### 3 数値例

ここでは、2 節のループ整形にもとづいたコントローラ (位相遅れ補償) の設計法を

$$P(s) = \frac{20}{s^2 + 11s + 10} \quad (2)$$

であらわされる制御対象  $P$  に適用し、具体的な手順を確認する。  $L = P$  の開ループ特性を Fig. 4 に示す。

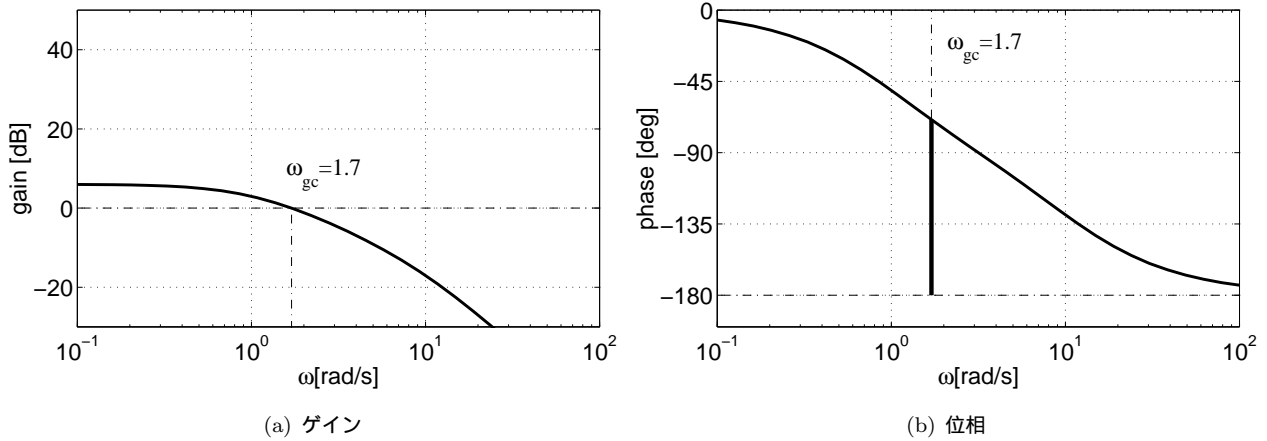


図 4: 開ループ特性  $L = P$

制御対象は十分な位相余裕を有しており、安定な系である。一方、低周波ゲイン ( $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$ ) は定数値で留まっている、このためステップ応答に対して定常偏差が生じると推測される。目標値  $r = 1$  に対する閉ループ系  $T = \frac{P}{1+P}$  のステップ応答を Fig. 5 に示す。

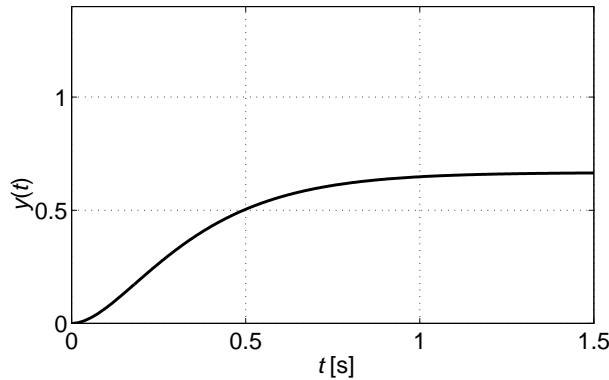


図 5: 閉ループ系  $T = \frac{P}{1+P}$  のステップ応答

制御対象  $P$  は大きな位相余裕を有しているの、ゲイン補償  $C_1(s) = K$  によりゲイン交差周波数を高く設定し、これにより過渡特性を改善することが可能である。ここで注意すべき点は、ゲイン  $K$  を高く設定しすぎ位相余裕を損なわないようにすることである。  $C_1(s) = K = 10$  とした場合の開ループ特性  $L_1 = PC_1$  を Fig. 6 に示す。

Fig. 6 では、ゲイン補償  $C_1$  の効果により、位相余裕は十分に確保した上で Fig. 4 よりゲイン交差周波数が高くなっている。よって過渡特性が改善されるものと期待される。一方、低周波ゲイン ( $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)|$ ) についてはやはり定数値で留まっている。このため定常偏差の除去は達成できないと推測される。目標値  $r = 1$  に対する閉ループ系  $T_1 = \frac{L_1}{1+L_1}$  のステップ応答を Fig. 7 に示す。

Fig. 7 では、Fig. 5 に比較し、過渡特性が改善され応答が早くなっている。また位相余裕も十分に確保されているので、振動的な振舞いは生じていない。

Fig. 7 に見られる定常偏差を除去するには、位相遅れ補償により低周波ゲインを大きくする必要がある。そこで位相遅れ補償  $C_2(s) = K \left( \frac{T_s + 1}{T_s} \right)$  の設計を考える。ゲイン  $K$  は  $C_1$  と同様に  $K = 10$  とする。ゲインが高く

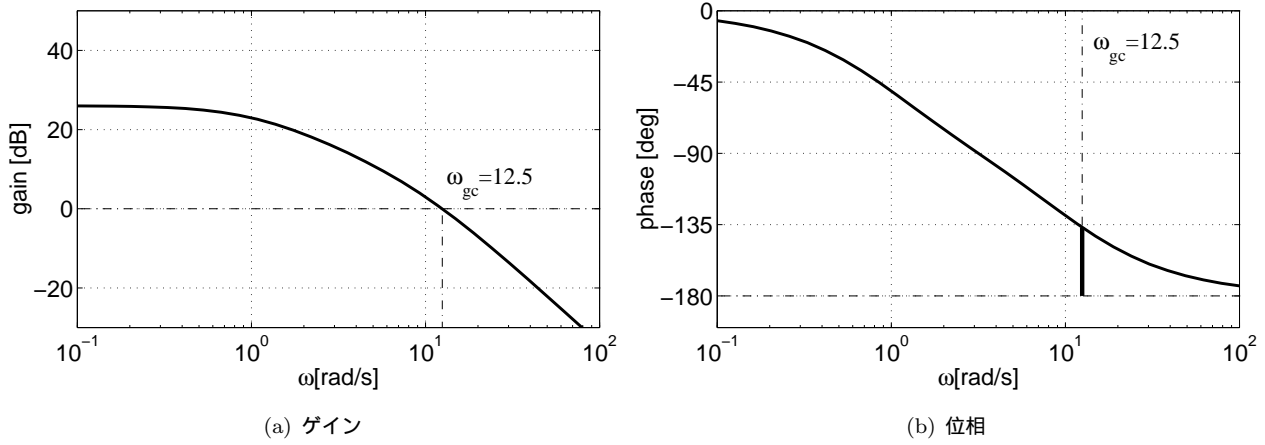


図 6: 開ループ特性  $L_1 = PC_1$

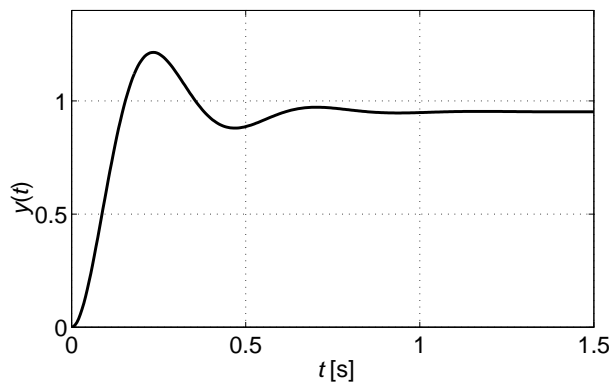


図 7: 閉ループ系  $T_1 = \frac{L_1}{1 + L_1}$  のステップ応答

なり始める周波数  $\omega = 1/T$  の設定で注意すべき点は、 $\omega = 1/T$  付近から位相が遅れ始めるため、これが位相余裕に大きな影響を与えないようにすることである。Fig. 6 のゲイン交差周波数  $\omega_{gc} = 12.5$  [rad/s] より  $1/T$  の値を 1 [dec] ほど低周波に取り  $T = 1$  とする。  $C_2(s) = 10 \left( \frac{s+1}{s} \right)$  とした場合の開ループ特性  $L_2 = PC_2$  を Fig. 8 に示す。

Fig. 8 では、位相遅れ補償の効果により低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  を達成している。(Fig. 6(a) と Fig. 8(a) を比較すると  $\omega = 1/T = 1$  [rad/s] 付近からゲインが増加している、また Fig. 6(b) と Fig. 8(b) を比較すると  $\omega = 1/T = 1$  [rad/s] 付近から位相が遅れはじめている、それぞれ確認すること) よって Fig. 7 に見られた定常偏差を除去できると期待される。またゲイン交差周波数、位相余裕は、Fig. 6 からほとんど影響を受けていないことに注意する。目標値  $r = 1$  に対する閉ループ系  $T_2 = \frac{L_2}{1 + L_2}$  のステップ応答を Fig. 9 に示す。

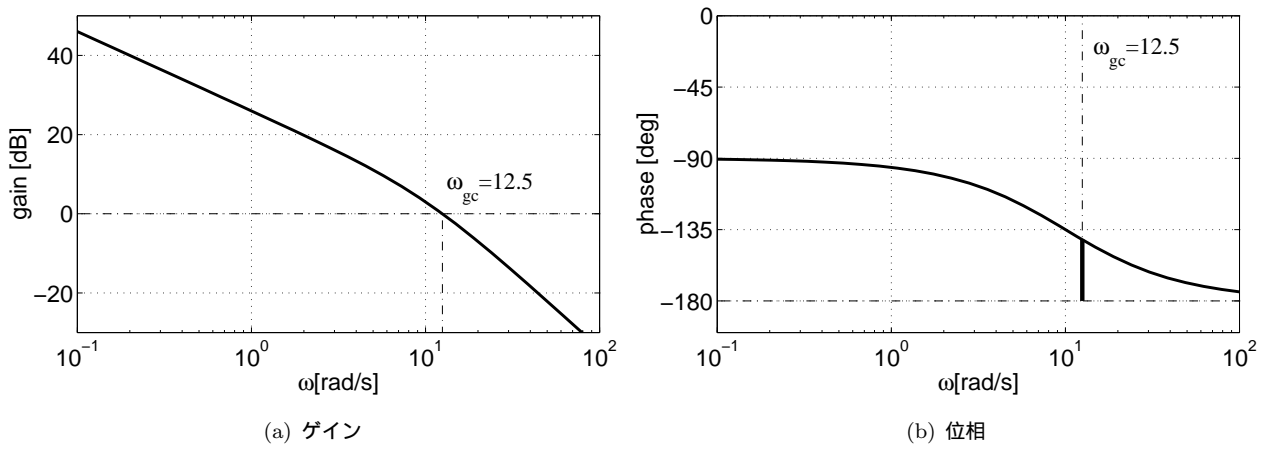


図 8: 開ループ特性  $L_2 = PC_2$

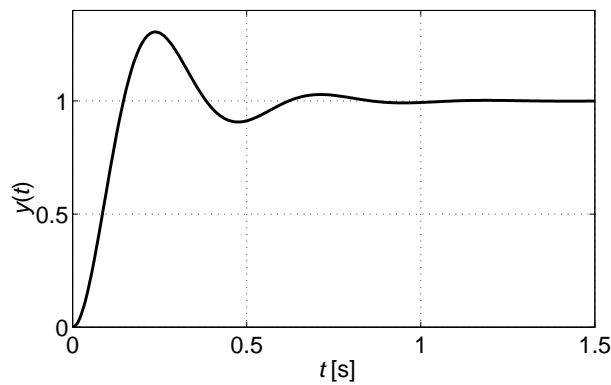


図 9: 閉ループ系  $T_2 = \frac{L_2}{1 + L_2}$  のステップ応答

## 参考文献

- [1] 杉江, 藤田: フィードバック制御入門, コロナ社, 1999.
- [2] 片山: 新版 フィードバック制御の基礎, 朝倉書店, 2002.
- [3] 小林: 基礎制御工学, 共立出版, 1988.
- [4] C. E. Rohrs, J. L. Melsa and D. G. Schultz: *Linear control systems*, McGraw-Hill, 1993.
- [5] W. A. Wolovich: *Automatic control systems*, Saunders College Publishing, 1994.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. E.-Naeni: *Feedback control of dynamic systems*, 4th Edition, Addison-Wesley, 2002.