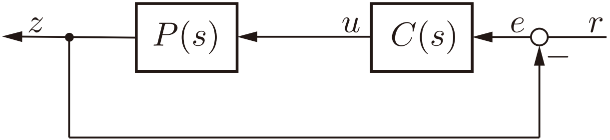
システム制御工学 II　　フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性
11/21 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系
01/30 期末試験

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{b^p_{n^p_n} s^{n^p_n} + b^p_{n^p_n-1} s^{n^p_n-1} + \cdots + b^p_1 s + b^p_0}{s^{n^p_d} + a^p_{n^p_d-1} s^{n^p_d-1} + \cdots + a^p_1 s + a^p_0} \qquad n^p_n < n^p_d$$

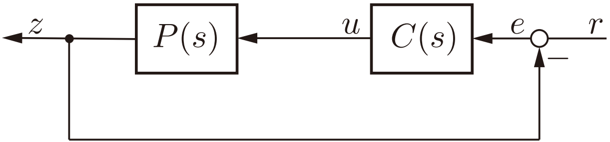
$$N_p(s) = b^p_{n^p_n} s^{n^p_n} + b^p_{n^p_n-1} s^{n^p_n-1} + \cdots + b^p_1 s + b^p_0$$

$$D_p(s) = s^{n^p_d} + a^p_{n^p_d-1} s^{n^p_d-1} + \cdots + a^p_1 s + a^p_0$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



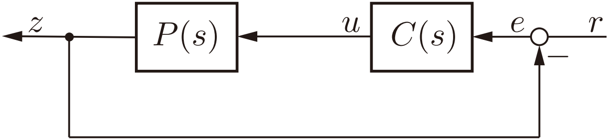
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) \qquad x_p(t_0) = x_{p0} \\
z(t) &= C_p x_p(t) \qquad t \geq t_0
\end{aligned}
$$

$$
A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} \quad B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1} \quad C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}
$$

$$
P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p = \frac{1}{\det(sI - A_p)} C_p \mathrm{adj}(sI - A_p) B_p
$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$C(s) = \frac{b^c_{n^c_n} s^{n^c_n} + b^c_{n^c_n-1} s^{n^c_n-1} + \cdots + b^c_1 s + b^c_0}{s^{n^c_d} + a^c_{n^c_d-1} s^{n^c_d-1} + \cdots + a^c_1 s + a^c_0} \qquad n^c_n \leq n^c_d$$

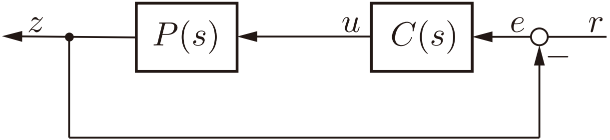
$$N_c(s) = b^c_{n^c_n} s^{n^c_n} + b^c_{n^c_n-1} s^{n^c_n-1} + \cdots + b^c_1 s + b^c_0$$

$$D_c(s) = s^{n^c_d} + a^c_{n^c_d-1} s^{n^c_d-1} + \cdots + a^c_1 s + a^c_0$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$n_n^c = n_d^c$$

$$u = 3e = \frac{3}{1}e$$

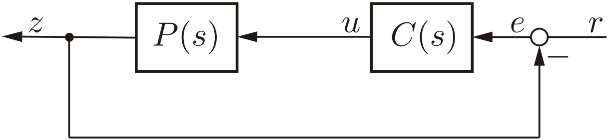
$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 0e(t)\\ u(t) &= 0x_c(t) + 3e(t)\end{aligned}$$

$$u = 3e + \frac{1}{s}e = \frac{3s+1}{s}e$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 1e(t)\\ u(t) &= 1x_c(t) + 3e(t)\end{aligned}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \qquad x_c(t_0) = x_{p0}$$

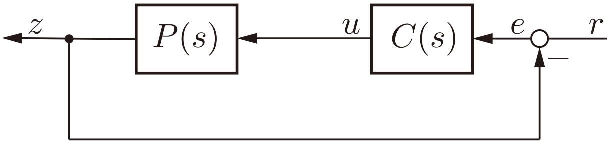
$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t) \qquad t \geq t_0$$

$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1} \quad C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c} \quad D_c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} C(s) &= D_c + C_c(sI - A_c)^{-1} B_c \\ &= D_c + \frac{1}{\det(sI - A_c)} C_c \mathrm{adj}(sI - A_c) B_c \\ &= \frac{D_c \det(sI - A_c) + C_c \mathrm{adj}(sI - A_c) B_c}{\det(sI - A_c)} \end{aligned}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



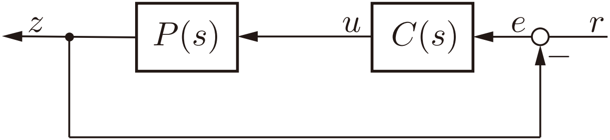
$$n_n^c = n_d^c$$

$$u = 3e = \frac{3}{1}e \qquad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 0e(t) \\ u(t) &= 0x_c(t) + 3e(t) \end{aligned}$$

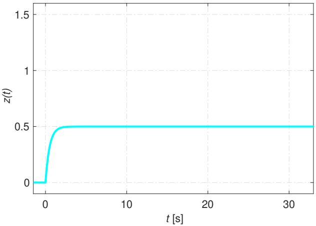
$$u = 3e + \frac{1}{s}e = \frac{3s+1}{s}e \qquad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 1e(t) \\ u(t) &= 1x_c(t) + 3e(t) \end{aligned}$$

有界入力有界出力安定性

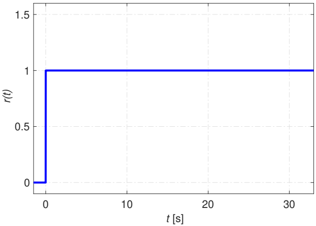
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



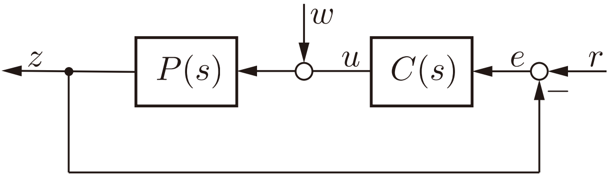
a 出力 $z(t)$



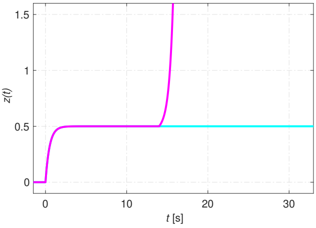
b ステップ入力 $r(t)$

有界入力有界出力安定性

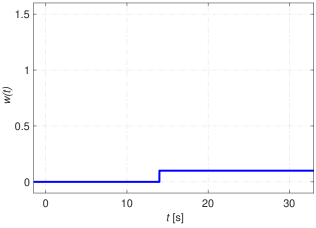
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



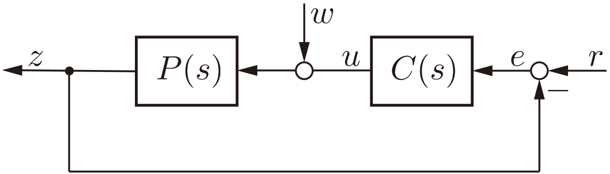
a 出力 $z(t)$



b 外乱 $w(t)$

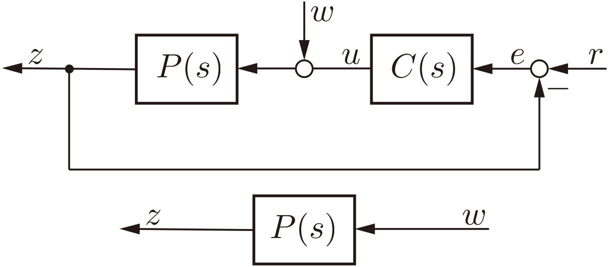
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



有界入力有界出力安定性

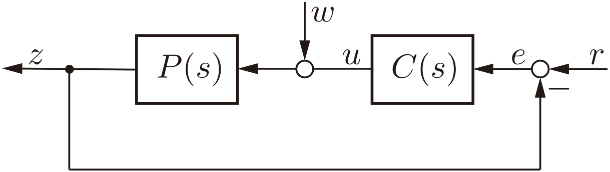
フィードバック制御系の安定性

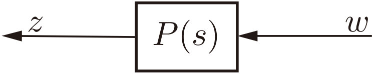


a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P

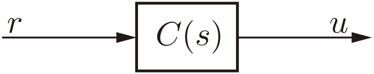
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性





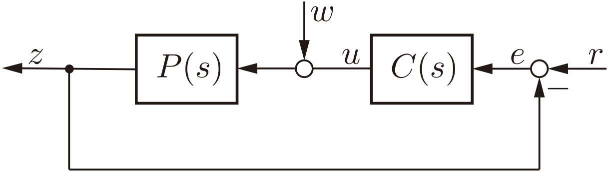
a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P

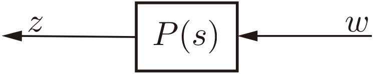


b フィードバック制御系の構成要素: コントローラ C

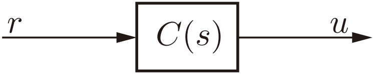
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

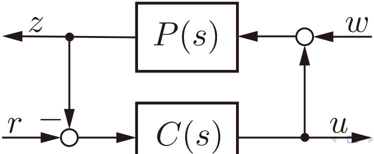




a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P

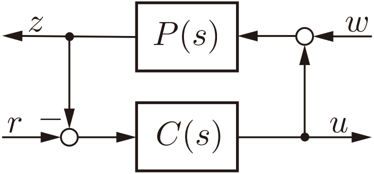


b フィードバック制御系の構成要素: コントローラ C



有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

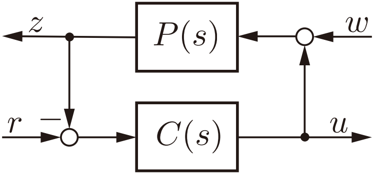


安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)

任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

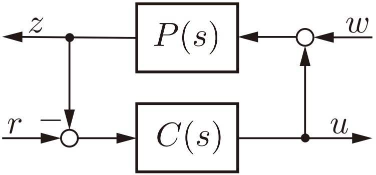


$$
\begin{aligned}
z &= P(s)(u+w) = P(s)u + P(s)w \\
&= P(s)C(s)(r-z) + P(s)w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+P(s)C(s))z &= P(s)C(s)r + P(s)w \\
z &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r + \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}w
\end{aligned}
$$

有界入力有界出力安定性

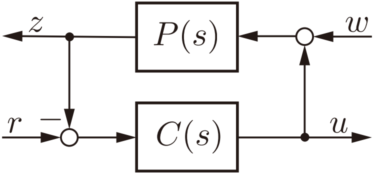
フィードバック制御系の安定性



$$
\begin{aligned}
u &= C(s)(r - z) = C(s)r - C(s)z \\
&= C(s)r - C(s)P(s)(u + w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1 + C(s)P(s))u &= C(s)r - C(s)P(s)w \\
u &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}r - \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}w
\end{aligned}
$$

有界入力有界出力安定性



$$z = G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r$$
$$u = G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r$$

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$
$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

ちょっと復習

有界入力有界出力安定性

安定性の定義 1 (有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 u に対する出力 z が有界

定 理 (有界入力有界出力安定)
任意の有界入力 u に対する有理伝達関数 G の出力 z が有界となる必要十分条件は, G のすべての極の実数部が負であることである.

有界入力有界出力安定性

安定性の定義 1 (有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 u に対する出力 z が有界

定 理 (有界入力有界出力安定)
任意の有界入力 u に対する有理伝達関数 G の出力 z が有界となる必要十分条件は, G のすべての極の実数部が負であることである.

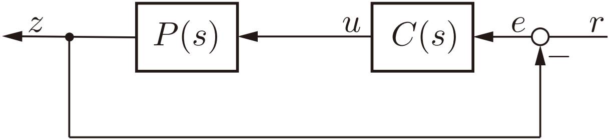
$$G(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)} \qquad p_1 = -1, p_2 = -2 \qquad \text{安定}$$

$$G(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s+3)} \qquad p_1 = 1, p_2 = -3 \qquad p_1 = 1 > 0 \ \text{不安定}$$

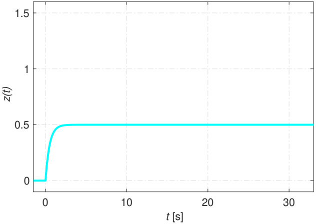
ここまで復習

有界入力有界出力安定性

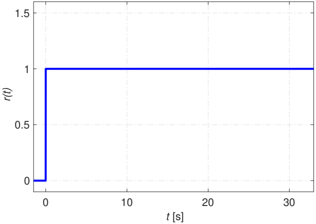
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



a 出力 $z(t)$



b ステップ入力 $r(t)$

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

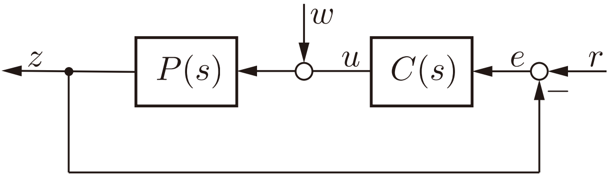
$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-2}\frac{s-2}{s+1}}{1+\frac{1}{s-2}\frac{s-2}{s+1}} = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)+(s-2)} \\ &= \frac{s-2}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s-2}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

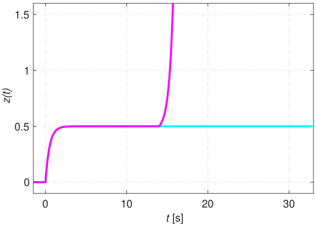
$G_{zr}(s)$ の極: -2 安定

有界入力有界出力安定性

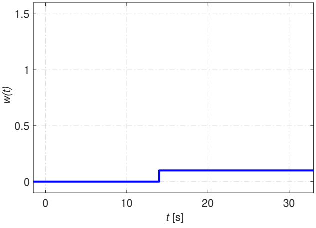
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



a 出力 $z(t)$



b 外乱 $w(t)$

有界入力有界出力安定性

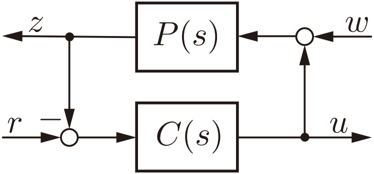
フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} &= \frac{\frac{1}{s-2}}{1+\frac{1}{s-2}\frac{s-2}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-2)(s+1)+(s-2)} \\ &= \frac{s+1}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s+1}{(s-2)(s+2)} \end{aligned}$$

$G_{zw}(s)$ の極: $\quad -2,\ 2 \qquad 2 > 0$ 不安定

有界入力有界出力安定性



$$z = G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r$$
$$u = G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r$$

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$
$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)}$$

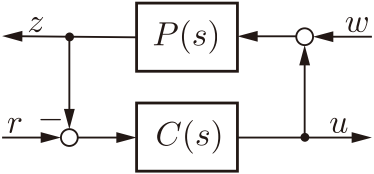
(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

有界入力有界出力安定性

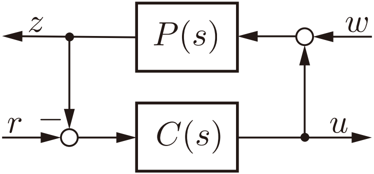
フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, 四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)}$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)}$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\dfrac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1+\dfrac{N_p(s)}{D_p(s)}\dfrac{N_c(s)}{D_c(s)}}$$

$$= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$\begin{aligned}
G_{zw}(s) &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
G_{zr}(s) &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
G_{uw}(s) &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
G_{ur}(s) &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}
\end{aligned}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

- 分母多項式は，共通に $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ すべての根の実数部が負)

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

- 特性多項式　$\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$
- $\phi(s) = 0$ の根:　閉ループ極

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$N_p(s) = 1 \quad (n_n^p = 0) \qquad D_p(s) = s-2 \quad (n_d^p = 1)$$

$$N_c(s) = s-2 \quad (n_n^c = 1) \qquad D_c(s) = s+1 \quad (n_d^c = 1)$$

$$\begin{aligned} \phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) &= (s+1)(s-2) + (s-2) \times 1 \\ &= (s+1+1)(s-2) = (s+2)(s-2) \end{aligned}$$

閉ループ極: $-2,\ 2$ $\qquad 2 > 0$ **不安定**

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$

$$N_p(s) = 1 \quad (n_n^p = 0) \qquad D_p(s) = s - 2 \quad (n_d^p = 1)$$

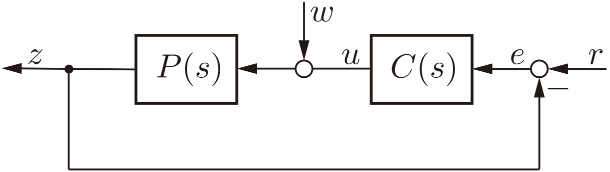
$$N_c(s) = 5(s+1) \quad (n_n^c = 1) \qquad D_c(s) = s \quad (n_d^c = 1)$$

$$\begin{aligned} \phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) &= s(s-2) + 5(s+1) \times 1 \\ &= s^2 - 2s + 5s + 5 = s^2 + 3s + 5 \end{aligned}$$

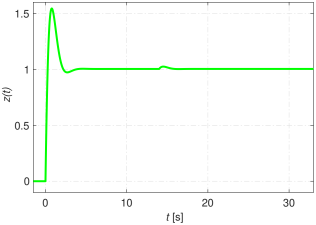
閉ループ極: $p_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2 \qquad \mathrm{Re}[\,p_{1,2}\,] = -3/2 < 0$ **安定**

特性多項式

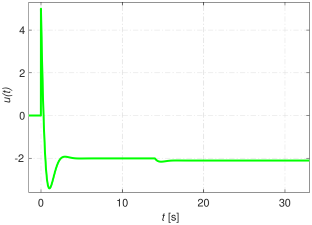
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$



a 出力 $z(t)$



b 入力 $u(t)$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

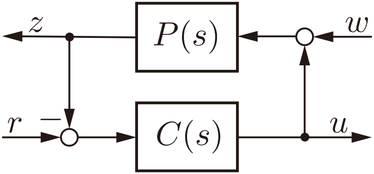
(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

有界入力有界出力安定性

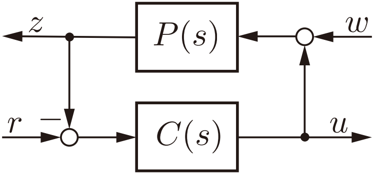
フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

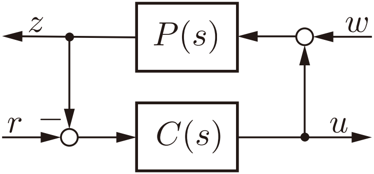


安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, 四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は，四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は，$\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負であることである

システム制御工学 II　フィードバック制御系の設計

	フィードバック vs フィードフォワード
	フィードバック制御系の安定性
11/21	中間試験
	ナイキストの安定判別法
	ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
	二自由度制御系
01/30	期末試験

ちょっと復習

漸近安定性

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

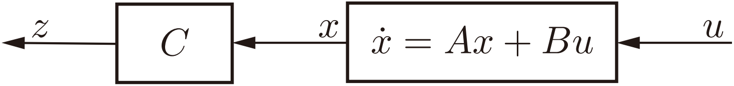
零入力応答

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad\qquad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\,(sI - A)^{-1}\,]$$

安定性の定義 3 (漸近安定性)
任意の x_0 に対して $x(t) = e^{At}x_0 \to 0$

定 理 (漸近安定)
任意の x_0 に対して $x(t) = e^{At}x_0 \to 0$ であるための必要十分条件は, 行列 A のすべての固有値の実数部が負であることである.

状態空間表現について, 補足



$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

(漸近安定) $\Leftrightarrow$ (行列 A のすべての固有値の実数部が負)

$\Rightarrow$ (伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ の

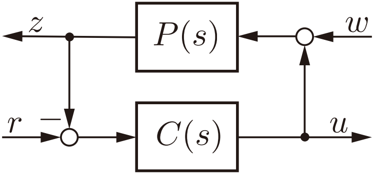
すべての極の実数部が負)

$\Leftrightarrow$ (有界入力有界出力安定)

ここまで復習

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性



$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p(w(t) + u(t)) \qquad x_p(t_0) = x_{p0}$$
$$z(t) = C_p x_p(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} \quad B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1} \quad C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c(r(t) - z(t)) \qquad x_c(t_0) = x_{p0}$$
$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c(r(t) - z(t)) \qquad t \geq t_0$$
$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1} \quad C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c} \quad D_c \in \mathbb{R}$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$e(t) = r(t) - z(t) = r(t) - C_p x_p(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) = A_c x_c(t) + B_c(r(t) - C_p x_p(t)) \\
&= -B_c C_p x_p(t) + A_c x_c(t) + B_c r(t) \\
&= \begin{bmatrix} -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) = C_c x_c(t) + D_c(r(t) - C_p x_p(t)) \\
&= -D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t) \\
&= \begin{bmatrix} -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

漸近安定性

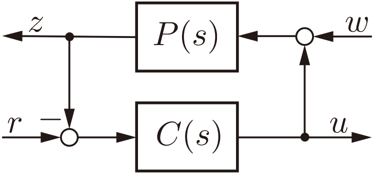
フィードバック制御系の安定性

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p(w(t) + u(t)) \\
&= A_p x_p(t) + B_p(w(t) - D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t)) \\
&= (A_p - B_p D_c C_p) x_p(t) + B_p C_c x_c(t) + B_p w(t) + B_p D_c r(t) \\
&= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
z(t) = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \qquad t \geq t_0$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \qquad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)

任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \qquad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= 2x_p(t) + u(t) \\ z(t) &= x_p(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 2e(t) \\ u(t) &= 2.5x_c(t) + 5e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2.5 \\ 2 & s \end{bmatrix}) \\ &= \lambda(\lambda+3) + 5 = \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

固有値: $\lambda_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2 \qquad \mathrm{Re}[\,\lambda_{1,2}\,] = -3/2 < 0$ **漸近安定**

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)
任意の初期条件

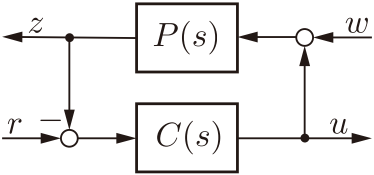
$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定 理 (フィードバック制御系の漸近安定性)
フィードバック制御系が漸近安定となる必要十分条件は,
行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負となることである

フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

$$\Leftrightarrow$$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

$$\Rightarrow$$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

$$\Leftrightarrow$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

フィードバック制御系の安定性

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix}\right) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$$

を示せばよい

資料の 11.4.1 節 を参照

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

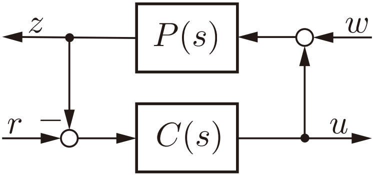
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

$$\Leftrightarrow$$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

$$\Rightarrow$$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

$$\Leftrightarrow$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

	フィードバック vs フィードフォワード
	フィードバック制御系の安定性
11/21	中間試験
	ナイキストの安定判別法
	ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
	二自由度制御系
01/30	期末試験