

## システム制御工学 II      フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード  
フィードバック制御系の安定性

11/21 中間試験

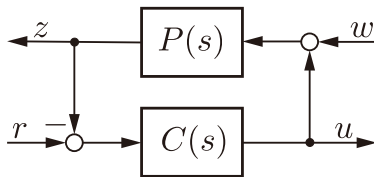
ナイキストの安定判別法  
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計  
二自由度制御系

01/30 期末試験

ちょっと復習

# 有界入力有界出力安定性

## フィードバック制御系の安定性



**安定性の定義** (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)  
任意の有界入力  $w, r$  に対する出力  $z, u$  が有界

**定理** (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)  
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、四つの伝達関数  $G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s)$  がすべて有界入力有界出力安定であることである

**定理** (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)  
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、 $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実数部が負であることである

# 有界入力有界出力安定性

## フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$
$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

⇔

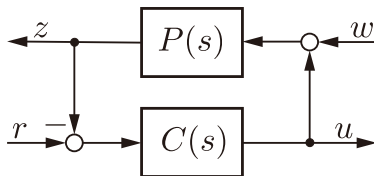
(四つの伝達関数  $G_{zw}(s)$ ,  $G_{zr}(s)$ ,  $G_{uw}(s)$ ,  $G_{ur}(s)$  が  
すべて有界入力有界出力安定)

⇔

( $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実数部が負)

# 漸近安定性

## フィードバック制御系の安定性



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq t_0$$

# 漸近安定性

## フィードバック制御系の安定性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

## 安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)

任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

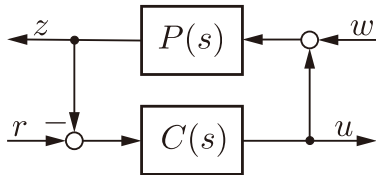
$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 定理 (フィードバック制御系の漸近安定性)

フィードバック制御系が漸近安定となる必要十分条件は、

行列  $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  のすべての固有値の実数部が負となることである

# フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

(行列  $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  のすべての固有値の実数部が負)

$\Rightarrow$

( $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実数部が負)

$\Leftrightarrow$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

ここまで復習



## システム制御工学 II      フィードバック制御系の設計

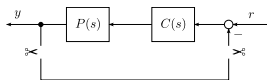
フィードバック vs フィードフォワード  
フィードバック制御系の安定性

11/21 中間試験

ナイキストの安定判別法  
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計  
二自由度制御系

01/30 期末試験

# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

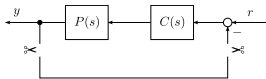


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$

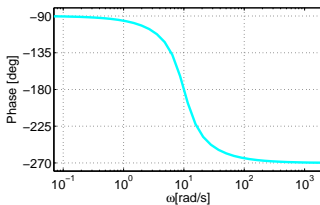
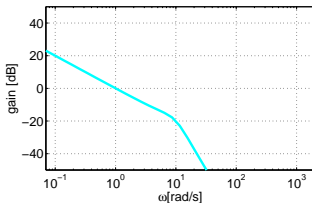
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



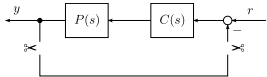
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



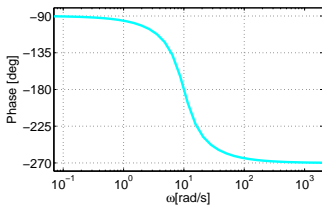
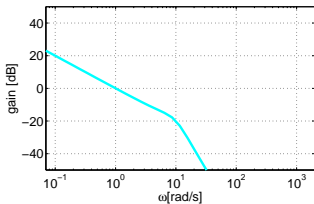
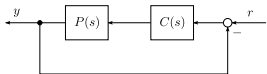
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



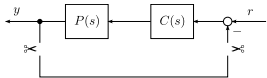
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



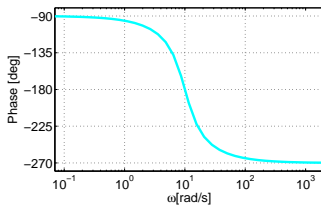
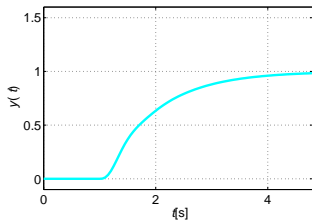
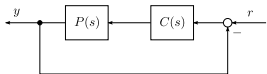
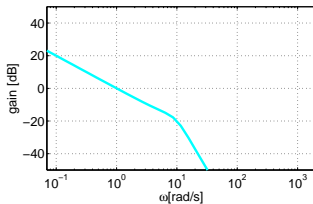
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



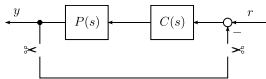
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



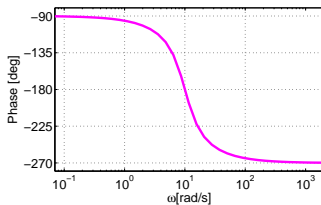
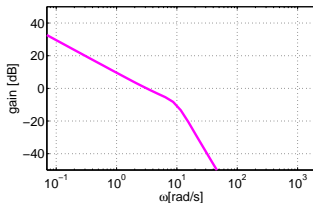
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



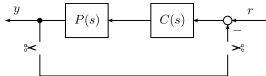
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3$$



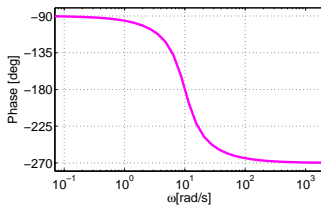
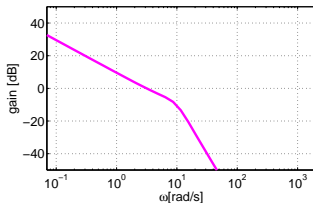
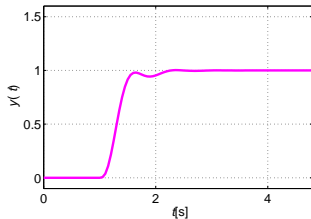
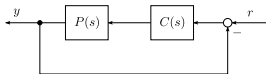
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



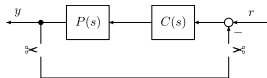
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3$$



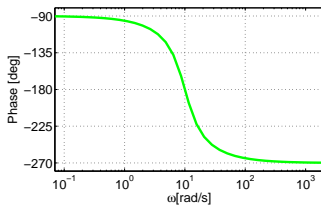
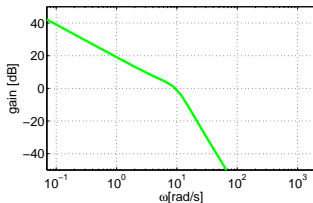
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

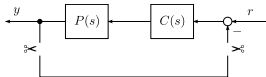
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3, 9$$





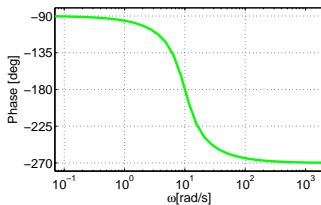
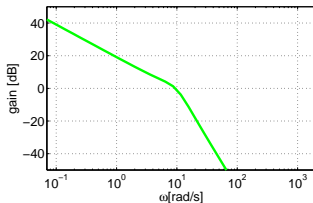
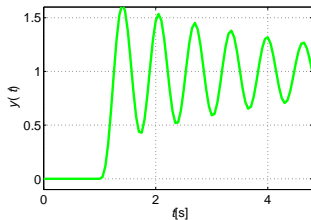
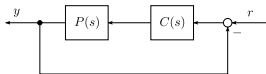
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3, 9$$



フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法: 準備

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法: 導出

簡略化されたナイキストの安定判別法

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

## ナイキストの安定判別法: 準備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

## ナイキストの安定判別法: 準備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$

$$1+L(s) = 1+P(s)C(s) = 1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

## ナイキストの安定判別法: 準備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$

$$1+L(s) = 1+P(s)C(s) = 1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極:  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根

開ループ極:  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

## 例題 13.1, 13.2

開ループ極:  $D_c(s)D_p(s) = 0$

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \quad C(s) = \frac{1}{s}$$

$D_p(s)D_c(s) = (s + 0.1)(s + 1) \times s$       開ループ極:  $-1, -0.1, 0$

$$P(s) = \frac{1}{s - 1} \quad C(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$$

$D_p(s)D_c(s) = (s - 1) \times (s + 1)$       開ループ極:  $-1, 1$

## ナイキストの安定判別法: 準備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極:  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根

開ループ極:  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

## ナイキストの安定判別法: 準備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極:  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根

開ループ極:  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

知りたい: 閉ループ極のうち, 不安定なもの個数  $Z$

知っている: 開ループ極のうち, 不安定なもの個数  $P$



フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法: 準備

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法: 導出

簡略化されたナイキストの安定判別法

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

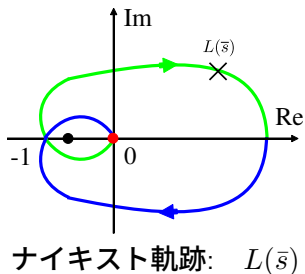
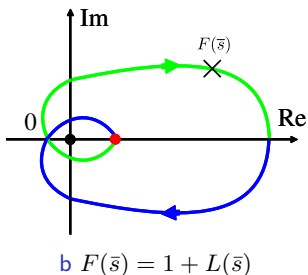
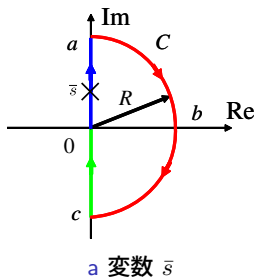
01/28 期末試験

# ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

- 知りたい: 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数  $Z$   
知っている: 開ループ極のうち, 不安定なものの個数  $P$

# ナイキストの安定判別法: 使い方



# ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい: 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数  $Z$

知っている: 開ループ極のうち, 不安定なものの個数  $P$

# ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい: 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数  $Z$

知っている: 開ループ極のうち, 不安定なものの個数  $P$

$$\text{ナイキストの安定判別法: } N = Z - P$$

# ナイキストの安定判別法: 使い方

## ナイキストの安定判別法

- 手順 1  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根 (開ループ極) のうち, 不安定なもの  
の個数  $P$  を数える.
- 手順 2 開ループ伝達関数のベクトル軌跡  $L(j\omega)$ ,  $\omega$  は 0 から  $\infty$   
の範囲, を描く.
- 手順 3 手順 2 での軌跡と実軸対象な軌跡を描き  $L(j\omega)$ ,  $\omega$  は  $-\infty$   
から 0 の範囲, をえる. これでナイキスト軌跡が描かれた.
- 手順 4 ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  の周りを時計回りに回転す  
る回数  $N$  を数える. ただし, 反時計回りの回転は負の数と  
して数える.
- 手順 5  $N = Z - P$  であり, フィードバック制御系は  $Z$  個の不安  
定極をもつ.  $Z = 0$  ならばフィードバック制御系は安定で  
ある.

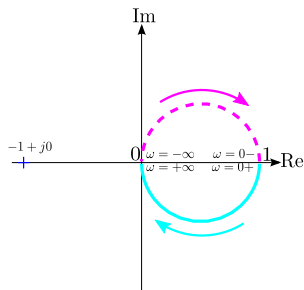
## 例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$

## 例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

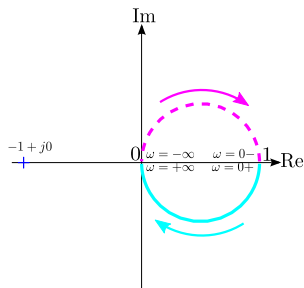


- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$



## 例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$
- ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を回る回数:  $N = 0$
- $N = Z - P$        $Z = 0$ : フィードバック制御系は安定

## 例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

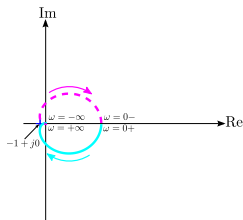
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$       不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$

## 例題 13.4

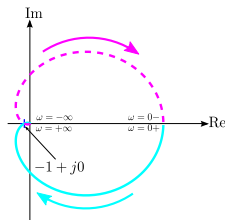
$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

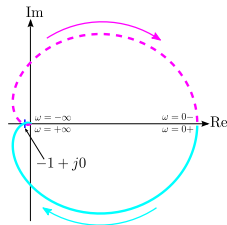
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ 
不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$



a  $k = 1$  の場合

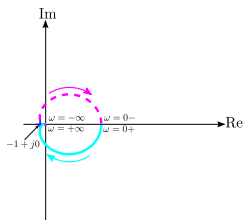


b  $k = 2.4$  の場合

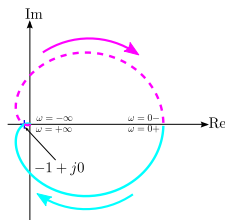


c  $k = 3$  の場合

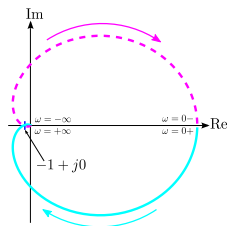
# 例題 13.4



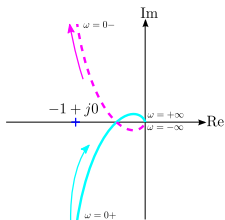
a  $k = 1$  の場合



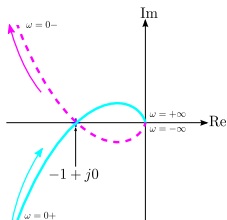
b  $k = 2.4$  の場合



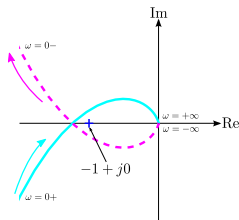
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合

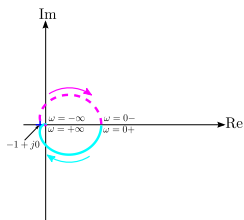


b  $k = 2.4$  の場合

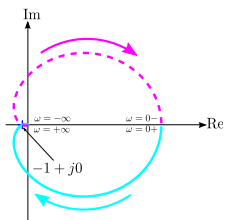


c  $k = 3$  の場合

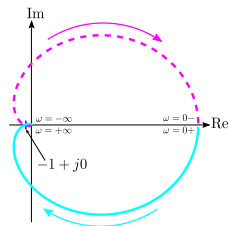
# 例題 13.4



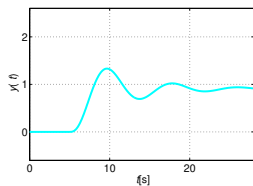
a  $k = 1$  の場合



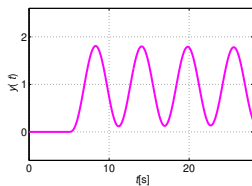
b  $k = 2.4$  の場合



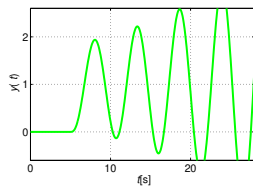
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合



b  $k = 2.4$  の場合



c  $k = 3$  の場合

## 例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

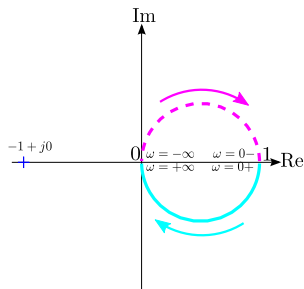
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$       不安定な開ループ極の数:  $P = 1$

## 例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

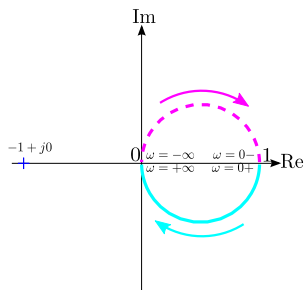


- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$       不安定な開ループ極の数:  $P = 1$

## 例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$       不安定な開ループ極の数:  $P = 1$
- ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を回る回数:  $N = 0$
- $N = Z - P$        $Z = 1$ : フィードバック制御系は不安定



フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法: 準備

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法: 導出

簡略化されたナイキストの安定判別法

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

## ナイキストの安定判別法: 導出

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい: 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数  $Z$

知っている: 開ループ極のうち, 不安定なものの個数  $P$

$$\text{ナイキストの安定判別法: } N = Z - P$$

## ナイキストの安定判別法: 導出

$$\begin{aligned} 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) &= \frac{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \\ &= \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \end{aligned}$$

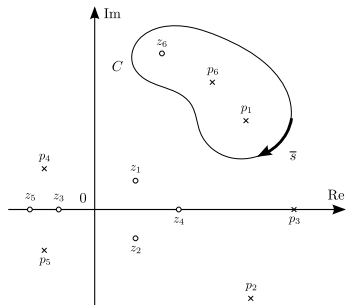
閉ループ極:  $z_1, \dots, z_n$       開ループ極:  $p_1, \dots, p_n$

知りたい:  $z_1, \dots, z_n$  のうち, 不安定なものの個数  $Z$

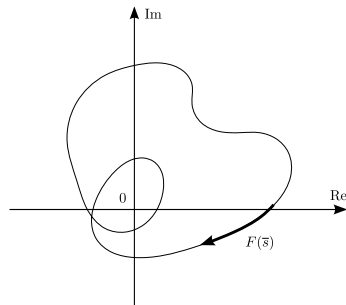
知っている:  $p_1, \dots, p_n$  のうち, 不安定なものの個数  $P$

# ナイキストの安定判別法: 導出

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{(s - z_1) \dots (s - z_n)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$



a



b

Figure: 閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する変数  $\bar{s}$  とその時の像

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \dots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \dots - \angle(s - p_n)$$

# ナイキストの安定判別法: 導出

閉曲線  $C$  で囲まれる領域に 1 つの零点  $z_1$  だけが含まれている:

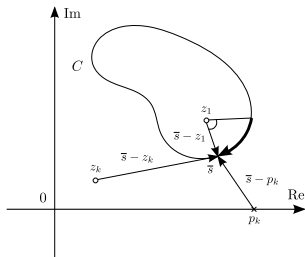


Figure:  $\angle(\bar{s} - z_1)$  の総変化量は  $-360$  [deg]

閉曲線  $C$  が零点を 1 つのみ囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに 1 回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots - \angle(s - p_n)$$

# ナイキストの安定判別法: 導出

閉曲線  $C$  で囲まれる領域の内部に  $Z$  個の零点のみが含まれている:

閉曲線  $C$  が零点を  $Z$  個のみ囲んでいる  $\Rightarrow$   
 $F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $Z$  回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots - \angle(s - p_n)$$

# ナイキストの安定判別法: 導出

閉曲線  $C$  で囲まれる境域に 1 つの極  $p_1$  だけが含まれている:

閉曲線  $C$  が極を 1 つのみ囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $-1$  回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots - \angle(s - p_n)$$

# ナイキストの安定判別法: 導出

閉曲線  $C$  で囲まれる境域に  $Z$  個の零点と  $P$  個の極が含まれている:

閉曲線  $C$  が零点を  $Z$  個, 極を  $P$  個囲んでいる  $\Rightarrow$   
 $F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $Z - P$  回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots - \angle(s - p_n)$$

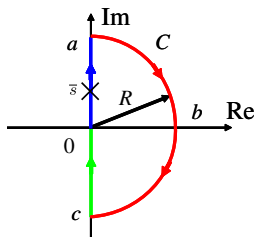


# ナイキストの安定判別法: 導出

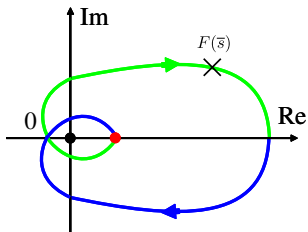
$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{(s - z_1) \dots (s - z_n)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

知りたい:  $z_1, \dots, z_n$  のうち, 不安定なものの個数  $Z$

知っている:  $p_1, \dots, p_n$  のうち, 不安定なものの個数  $P$



a 変数  $\bar{s}$



b  $F(\bar{s}) = 1 + L(\bar{s})$

- 閉曲線  $C$  が  $Z$  個の零点と  $P$  個の極を囲んでいる:

$$N = Z - P$$

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法: 準備

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法: 導出

簡略化されたナイキストの安定判別法

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

## 簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極：  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

## 簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極：  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

知っている： 開ループ極のうち、不安定なもの個数  $P = 0$

あるいは

## 簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極：  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

知っている： 開ループ極のうち、不安定なもの個数  $P = 0$

あるいは

知っている： 開ループ極に、0 が一つだけ、残りは安定

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad + \quad C(s) = \frac{s-2}{s(s+10)} \quad (\text{使える})$$
$$C(s) = \frac{s-2}{s^2} \quad (\text{使えない})$$

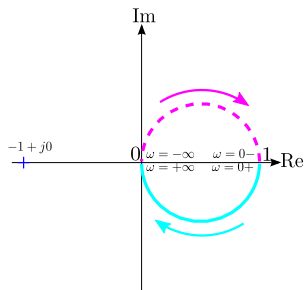
## 例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$

## 例題 13.3

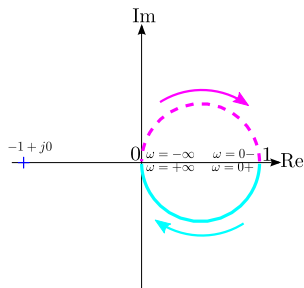
$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$

## 例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C(s) = 1 \quad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$       不安定な開ループ極の数:  $P = 0$
- ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を回る回数:  $N = 0$
- $N = Z - P$        $Z = 0$ : フィードバック制御系は安定



## 例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

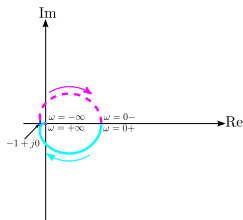
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$       不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$

## 例題 13.4

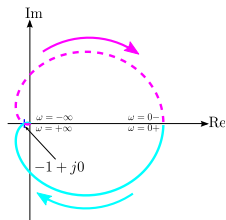
$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

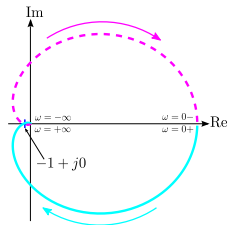
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ 
不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$



a  $k = 1$  の場合

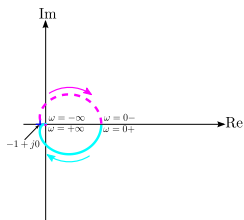


b  $k = 2.4$  の場合

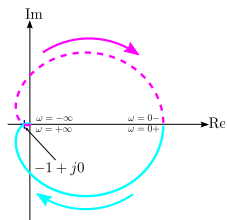


c  $k = 3$  の場合

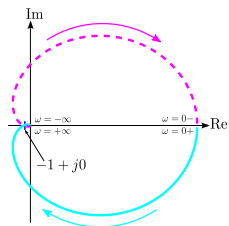
# 例題 13.4



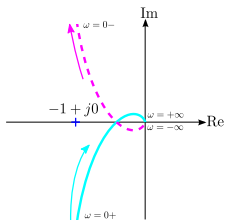
a  $k = 1$  の場合



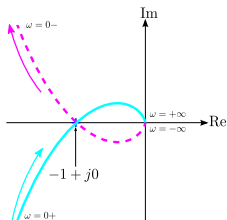
b  $k = 2.4$  の場合



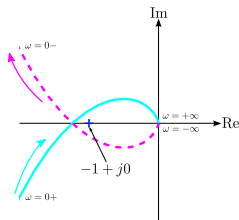
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合

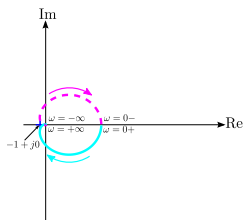


b  $k = 2.4$  の場合

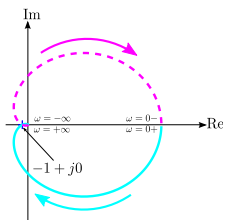


c  $k = 3$  の場合

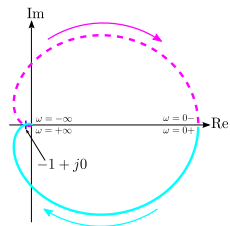
# 例題 13.4



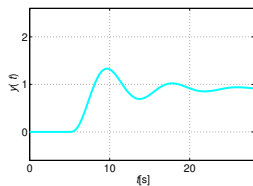
a  $k = 1$  の場合



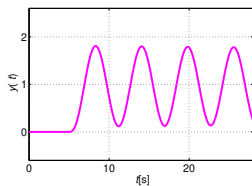
b  $k = 2.4$  の場合



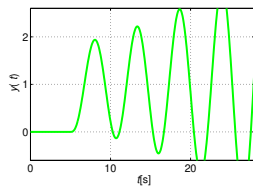
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合



b  $k = 2.4$  の場合



c  $k = 3$  の場合

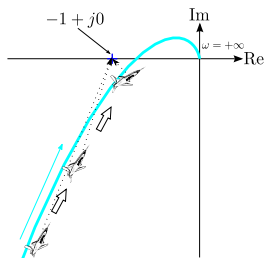
# 簡略化されたナイキストの安定判別法

開ループ極:  $D_c(s)D_p(s) = 0$  の根

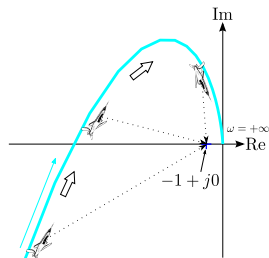
知っている: 開ループ極のうち, 不安定なものの個数  $P = 0$

あるいは

知っている: 開ループ極に, 0 が一つだけ, 残りは安定

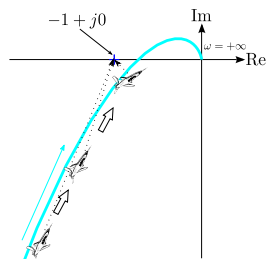


a 常に左手に見ているので 安定

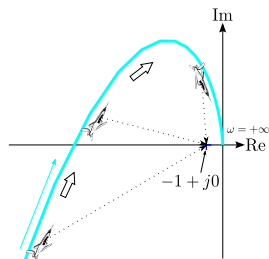


b 右手に見ることがあるので 不安定

# 簡略化されたナイキストの安定判別法



a 常に左手に見ているので 安定



b 右手に見ることがあるので 不安定

## 簡略化されたナイキストの安定判別法

手順 1  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根 (開ループ極) に不安定なものがないこと, あるいは  $s = 0$  の極が 1 つだけで, 他はすべて安定極であることを確認する.

手順 2 開ループ伝達関数のベクトル軌跡  $L(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$  を描く.

手順 3 ベクトル軌跡が, 点  $-1 + j0$  を常に左手に見れば, フィードバック制御系は内部安定, そうでなければ不安定となる.

## 例題 13.6

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \quad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$

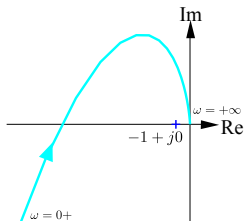
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s + 0.1)(s + 1)}$$

- $D_p(s)D_c(s) = s(s + 0.1)(s + 1)$       開ループ極は 0, 残りは安定

## 例題 13.6

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \quad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s + 0.1)(s + 1)}$$



a  $k = 1$  の場合

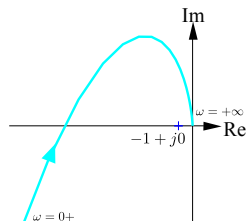
- $D_p(s)D_c(s) = s(s + 0.1)(s + 1)$  開ループ極は 0, 残りは安定
- ベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  を右手に見て原点へと収束. 安定ではない.



## 例題 13.7

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \quad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 0.08$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s + 0.1)(s + 1)}$$



a  $k = 1$  の場合

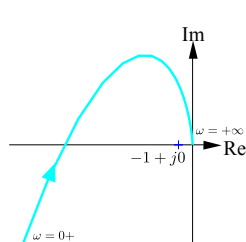
- $D_p(s)D_c(s) = s(s + 0.1)(s + 1)$

開ループ極は 0, 残りは安定

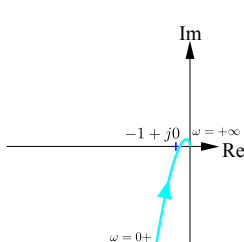
## 例題 13.7

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \quad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 0.08$$

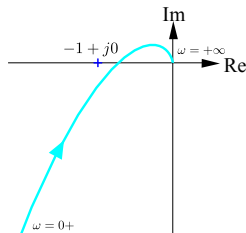
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s + 0.1)(s + 1)}$$



a  $k = 1$  の場合



b  $k = 0.08$  の場合



c  $k = 0.08$  の場合の拡大図

- $D_p(s)D_c(s) = s(s + 0.1)(s + 1)$  開ループ極は 0, 残りは安定
- ベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  を左手に見て原点へと収束, 安定.

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法: 準備

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法: 導出

簡略化されたナイキストの安定判別法

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

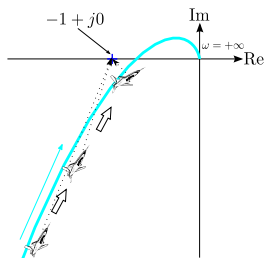
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

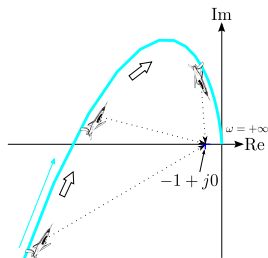
01/28 期末試験

# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

## 簡略化されたナイキストの安定判別法

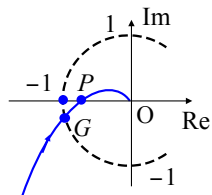


a 常に左手に見ているので 安定

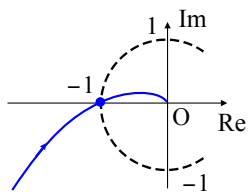


b 右手に見ることがあるので 不安定

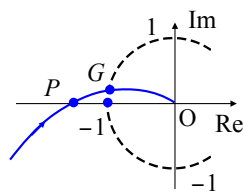
# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定

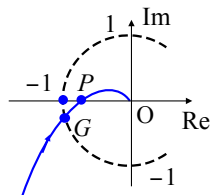


b 安定と不安定の間

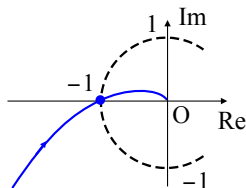


c 不安定

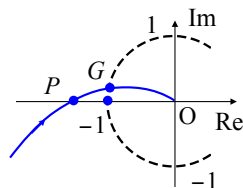
## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



b 安定と不安定の間

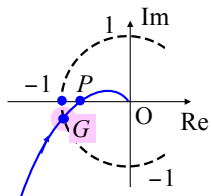


c 不安定

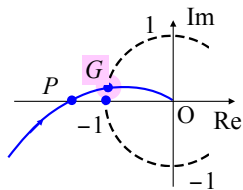
ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

位相交差周波数  $\omega_{pc}$  :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  となる周波数  $\omega$

## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



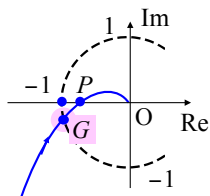
a 安定



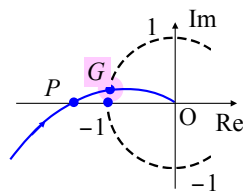
b 不安定

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



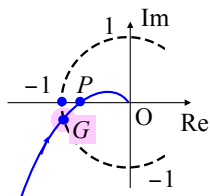
b 不安定

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

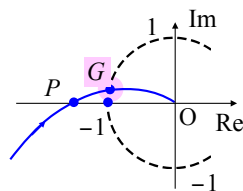
**安定**  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  のときに,  $\angle L(j\omega_{gc}) > -180 \text{ deg}$   
もっと位相が遅れても大丈夫: 位相余裕



## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



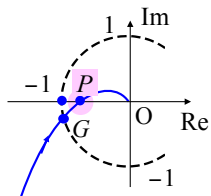
b 不安定

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

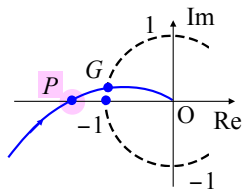
**安定**  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  のときに,  $\angle L(j\omega_{gc}) > -180 \text{ deg}$   
もっと位相が遅れても大丈夫: 位相余裕

**不安定**  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  のときに,  $\angle L(j\omega_{gc}) < -180 \text{ deg}$

## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



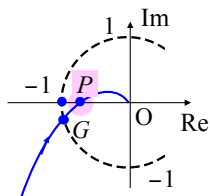
a 安定



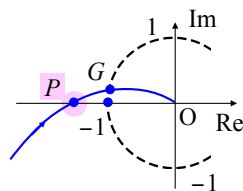
b 不安定

位相交差周波数  $\omega_{pc}$  :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  となる周波数  $\omega$

## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定

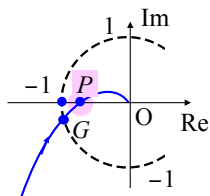


b 不安定

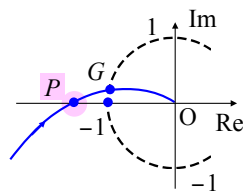
位相交差周波数  $\omega_{pc}$  :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  となる周波数  $\omega$

**安定**  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  のときに,  $|L(j\omega_{pc})| < 1$   
もっとゲインが大きくなって大丈夫: **ゲイン余裕**

## 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



b 不安定

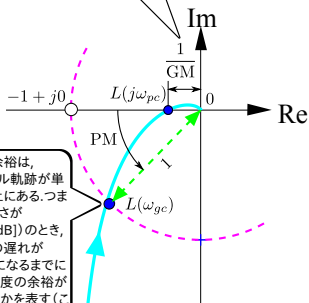
位相交差周波数  $\omega_{pc}$  :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  となる周波数  $\omega$

**安定**  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  のときに,  $|L(j\omega_{pc})| < 1$   
もっとゲインが大きくなっても大丈夫: **ゲイン余裕**

**不安定**  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  のときに,  $|L(j\omega_{pc})| > 1$

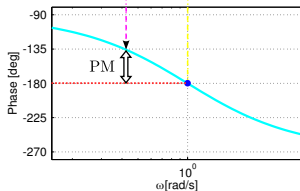
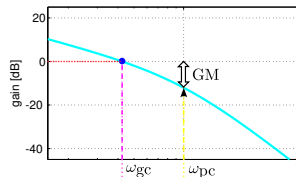
# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ゲイン余裕は、  
位相の遅れが $180^\circ$ のとき、大きさを  
あと何倍すると1 (0 [dB])になるか  
を表す。



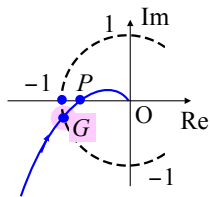
位相余裕は、  
ベクトル軌跡が単  
位円上にある。つまり  
大きさが  
1 (0 [dB])のとき、  
位相の遅れが  
 $180^\circ$ になるまでに  
あと何度の余裕が  
あるのかを表す(こ  
の図の場合は  
 $45^\circ$ )。

a ベクトル軌跡での読み取り

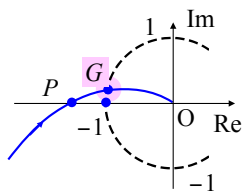


b ボード線図での読み取り

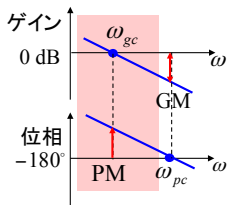
# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



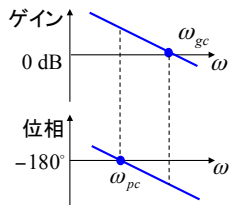
a 安定



b 不安定



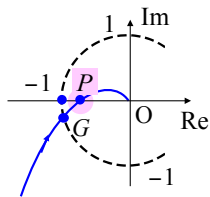
a 安定



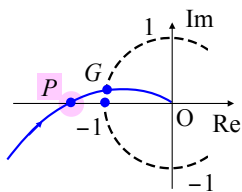
b 不安定

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

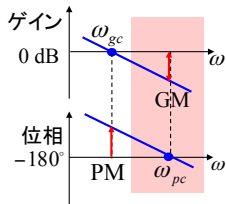
# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



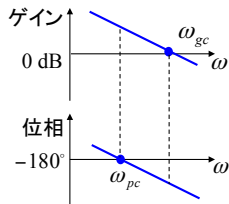
a 安定



b 不安定



a 安定

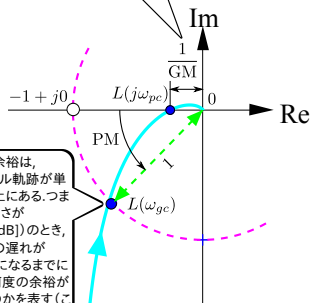


b 不安定

位相交差周波数  $\omega_{pc}$ :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ deg}$  となる周波数  $\omega$

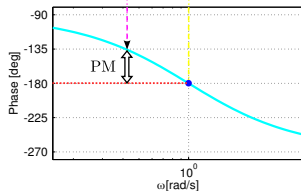
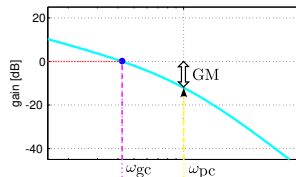
# 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ゲイン余裕は、  
位相の遅れが $180^\circ$ のとき、大きさを  
あと何倍すると1 (0 [dB])になるか  
を表す。



位相余裕は、  
ベクトル軌跡が単  
位円上にある。つまり  
大きさが  
1 (0 [dB])のとき、  
位相の遅れが  
 $180^\circ$ になるまでに  
あと何度の余裕が  
あるのかを表す(こ  
の図の場合は  
 $45^\circ$ )。

a ベクトル軌跡での読み取り



b ボード線図での読み取り



## 例題 13.8

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{0.5}{s}$$

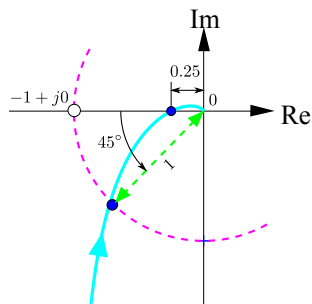
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times s$   
法が適用できる

簡略化されたナイキストの安定判別

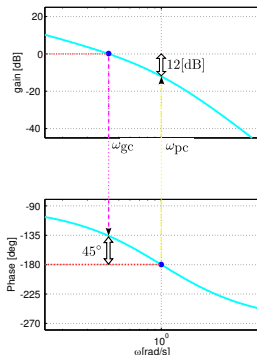
## 例題 13.8

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$C(s) = \frac{0.5}{s}$$



a ベクトル軌跡



b ボード線図

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times s$   
法が適用できる

簡略化されたナイキストの安定判別

## 例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

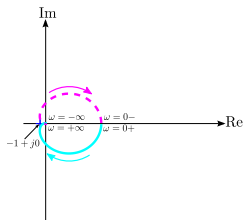
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$       不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$

## 例題 13.4

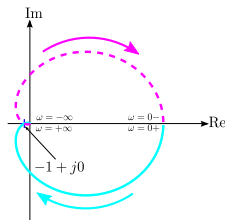
$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

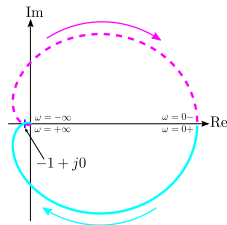
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ 
不安定な開ループ極の数:  
 $P = 0$



a  $k = 1$  の場合

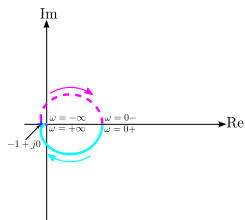


b  $k = 2.4$  の場合

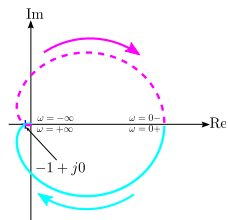


c  $k = 3$  の場合

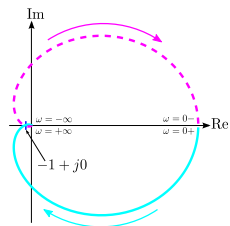
# 例題 13.4



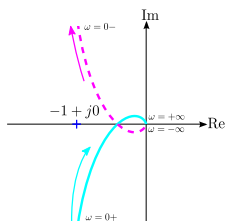
a  $k = 1$  の場合



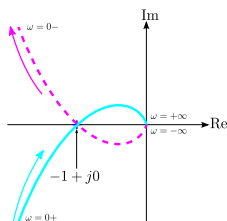
b  $k = 2.4$  の場合



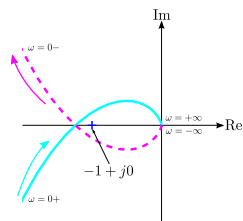
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合

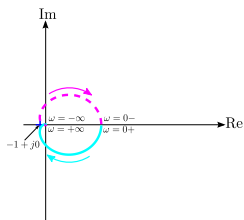


b  $k = 2.4$  の場合

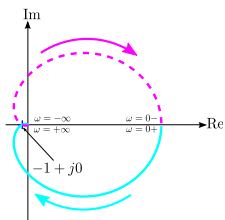


c  $k = 3$  の場合

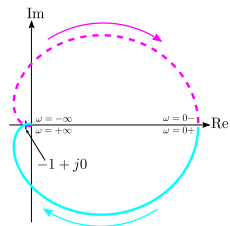
# 例題 13.4



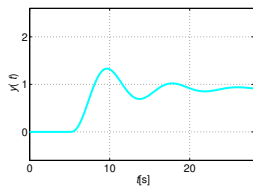
a  $k = 1$  の場合



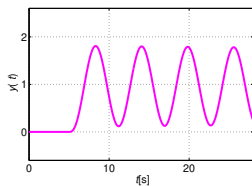
b  $k = 2.4$  の場合



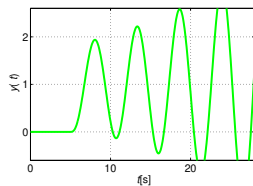
c  $k = 3$  の場合



a  $k = 1$  の場合



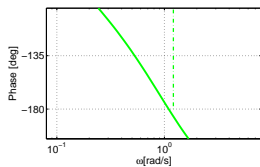
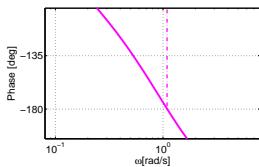
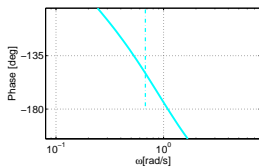
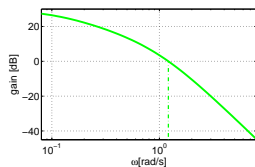
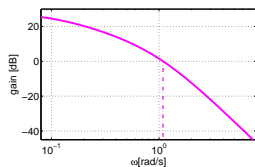
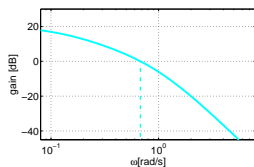
b  $k = 2.4$  の場合



c  $k = 3$  の場合

## 例題 13.9

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad C(s) = \frac{k}{s+0.1} \quad k = 1, 2.4, 3$$

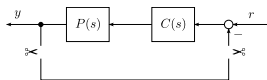


a  $k = 1$  の場合

b  $k = 2.4$  の場合

c  $k = 3$  の場合

# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



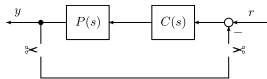
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



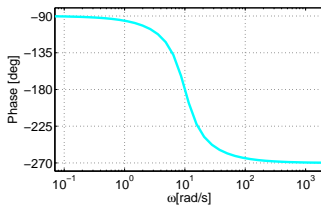
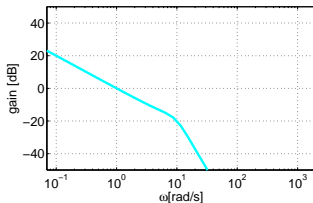
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



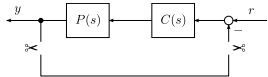
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



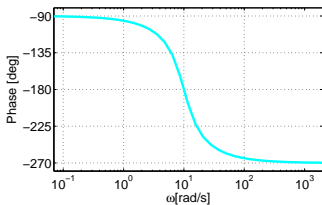
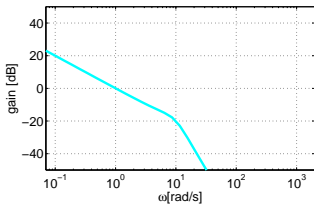
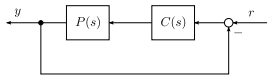
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



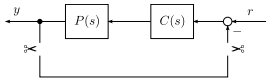
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



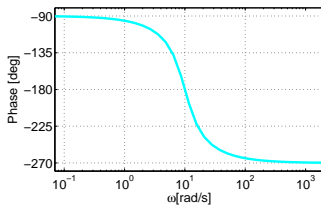
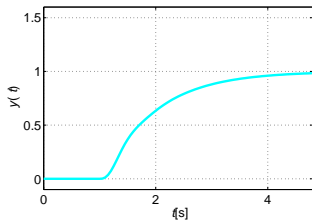
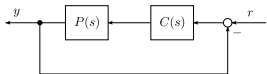
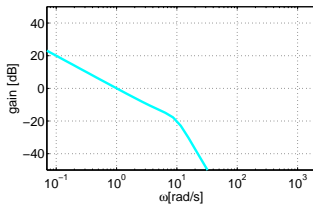
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



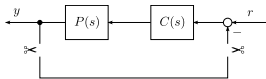
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$



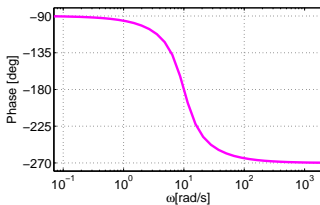
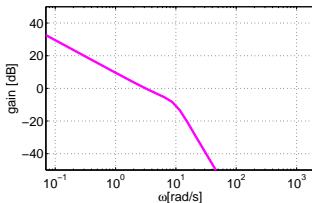
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



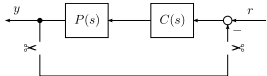
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3$$



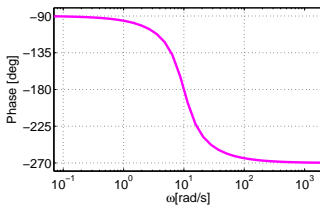
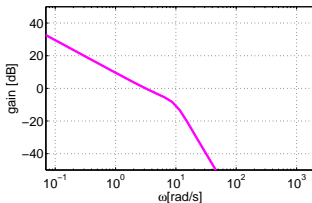
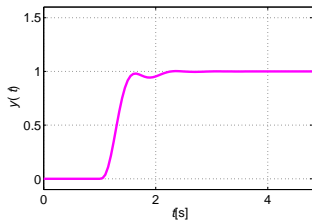
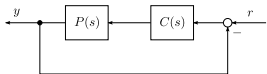
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



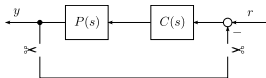
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3$$



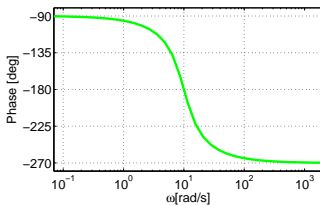
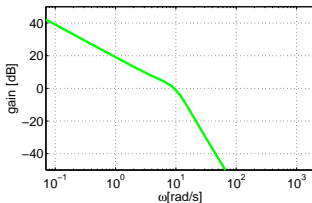
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



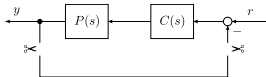
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3, 9$$



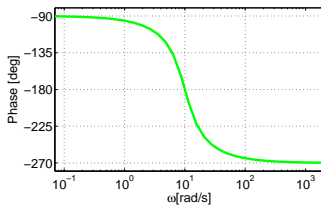
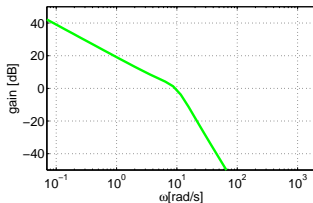
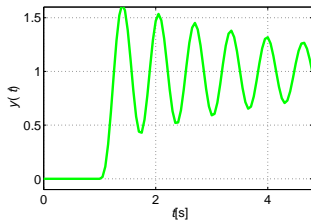
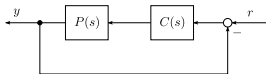
# フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1, 3, 9$$



## システム制御工学 II      フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード  
フィードバック制御系の安定性

11/21 中間試験

ナイキストの安定判別法  
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計  
二自由度制御系

01/30 期末試験