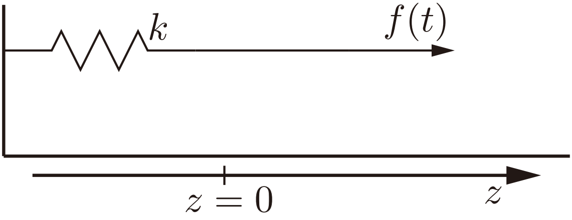
動的なシステムのモデリングと表現
ラプラス変換の復習
動的なシステムの応答
06/04 中間試験

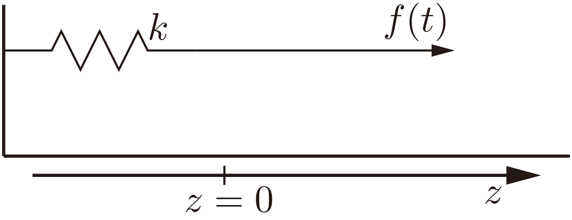
動的なシステムの安定性
動的なシステムの周波数応答
周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/30 期末試験

静的なシステム



- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)

静的なシステム

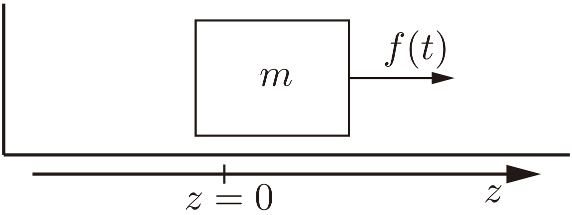


- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)

$$kz(t) = u(t)$$

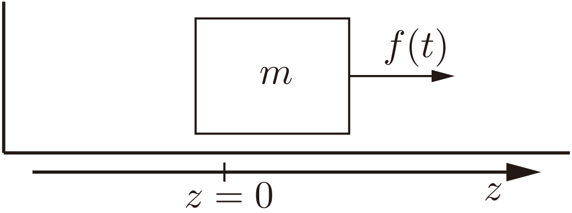
- ただし $u = f$

動的なシステム



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で:　$z(t_0) = z_0$ [m]　　$\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

動的なシステム

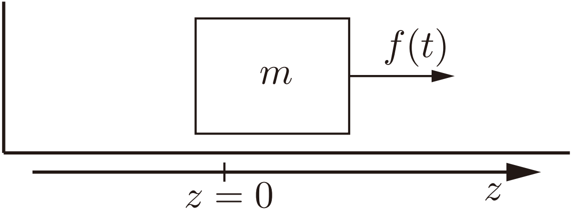


- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で:　$z(t_0) = z_0$ [m]　　$\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

動的なシステム



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で:　$z(t_0) = z_0$ [m]　　$\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

(動的なシステム) = (微分方程式で記述されるシステム)

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

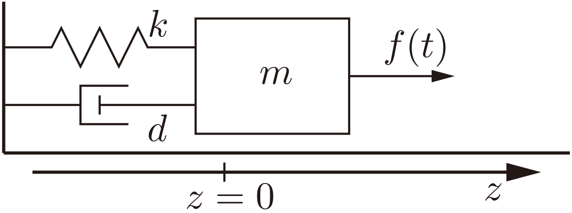
$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

本当に解か，確認

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \frac{d}{dt}\left(z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt} z_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \\ &= 0 + u(t) = u(t) \end{aligned}$$

微分方程式によるモデリング

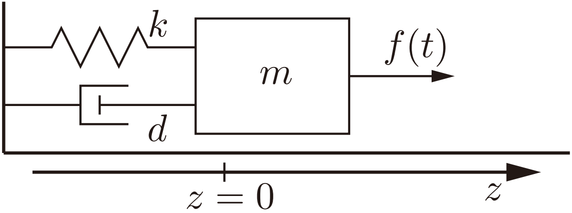
マス–バネ–ダンパ系



- 質点の質量: m [kg]　**バネ定数**: k [N/m]　**ダンパ定数**: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　**入力 (原因)**
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　**出力 (結果)**
- 初期時刻 $t = t_0$ で:　$z(t_0) = z_0$ [m]　　$\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

微分方程式によるモデリング

マス–バネ–ダンパ系



- 質点の質量: m [kg]　バネ定数: k [N/m]　ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で:　$z(t_0) = z_0$ [m]　　$\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

ブロック線図による表現: その 1

マス–バネ–ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

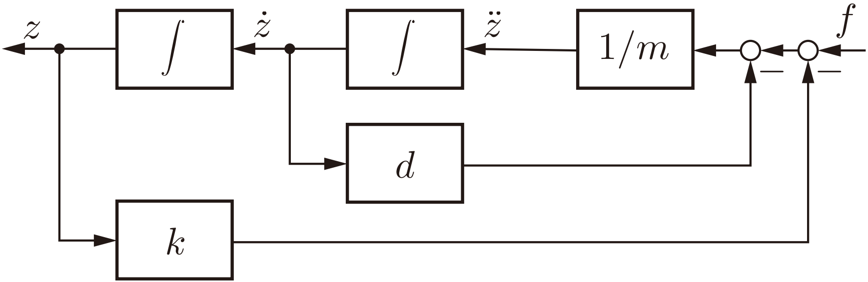
$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

ブロック線図による表現: その 1

マス–バネ–ダンパ系

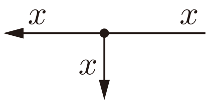
$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

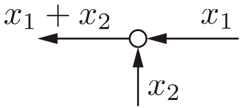


ブロック線図の主な要素

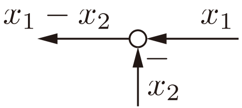
ブロック線図による表現: その 1



a 引き出し点



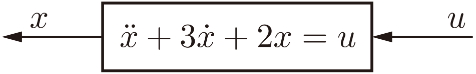
b 加え合わせ点, 足し算の場合



c 加え合わせ点, 引き算の場合

d 信号の定数倍

e 信号の積分



f u を入力とする動的なシステム

ブロック線図による表現: その 1

マス–バネ–ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

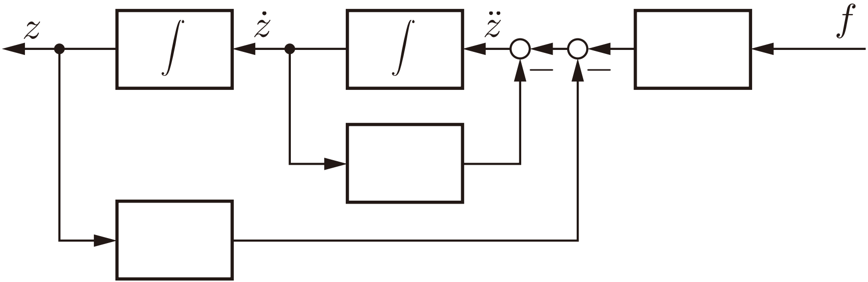
ブロック線図による表現: その 1

マス–バネ–ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$



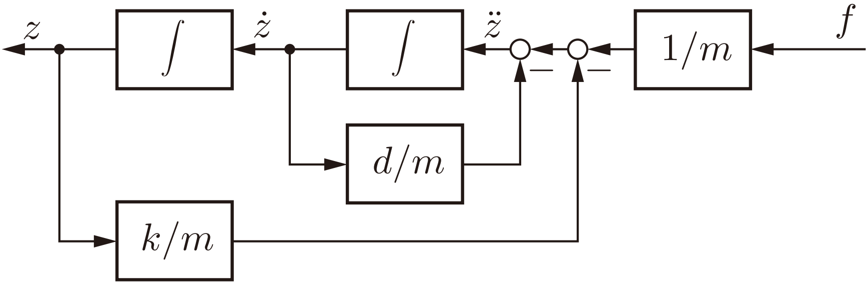
ブロック線図による表現: その 1

マス–バネ–ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$



状態空間表現によるモデリング

マス–バネ–ダンパ系

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

変数 $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ **を定義**:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

状態空間表現によるモデリング

マス–バネ–ダンパ系

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

変数 $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ **を定義**:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{z}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t) \\ &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{aligned}$$

状態空間表現によるモデリング

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)
\end{aligned}
$$

状態空間表現によるモデリング

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)
\end{aligned}
$$

$$
z(t) = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = [\,z_0 \quad v_0\,]^{\mathrm{T}} \\
&z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0
\end{aligned}
$$

状態空間表現によるモデリング

マス – バネ – ダンパ系の状態空間表現:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = \begin{bmatrix} z_0 & v_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad u = f$$

状態空間表現の一般形

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

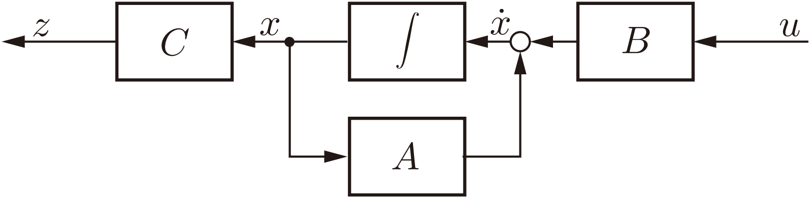
入力 u **出力** z **状態変数** $x \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

n **次元の状態空間表現 (実現)** $=$ **状態方程式** $+$ **出力方程式**

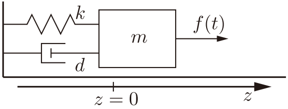
状態空間表現のブロック線図

状態空間表現によるモデリング



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}u(s)$$

伝達関数

$$\leftarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現

- 表 現:　ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow$ 　$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$ 　実現問題

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/04 中間試験

動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/30 期末試験

伝達関数によるモデリング

ラプラス変換:

$$\mathcal{L}[\,\dot{z}(t)\,] = sz(s) - z(0)$$

$$\mathcal{L}[\,\ddot{z}(t)\,] = s^2 z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

伝達関数によるモデリング

ラプラス変換:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\,\dot{z}(t)\,] &= sz(s) - z(0) \\
\mathcal{L}[\,\ddot{z}(t)\,] &= s^2 z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)
\end{aligned}
$$

マス – バネ – ダンパ系:

- 初期条件を $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 0$ と仮定して

$$
\begin{aligned}
m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) &= f(t) \\
\mathcal{L}[\,m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t)\,] &= \mathcal{L}[\,f(t)\,] \\
m\mathcal{L}[\,\ddot{z}(t)\,] + d\mathcal{L}[\,\dot{z}(t)\,] + k\mathcal{L}[\,z(t)\,] &= \mathcal{L}[\,f(t)\,] \\
ms^2 z(s) + dsz(s) + kz(s) &= f(s) \\
(ms^2 + ds + k)z(s) &= f(s)
\end{aligned}
$$

$$
z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)
$$

伝達関数の一般形

$$z(s) = G(s)u(s)$$

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n - 1} s^{n_n - 1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d - 1} s^{n_d - 1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

$$\begin{aligned} N(s) &= b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n - 1} s^{n_n - 1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= s^{n_d} + a_{n_d - 1} s^{n_d - 1} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

零点: $N(s) = 0$ の根
極: $D(s) = 0$ の根

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

零点: $N(s) = 0$ の根
極: $D(s) = 0$ の根

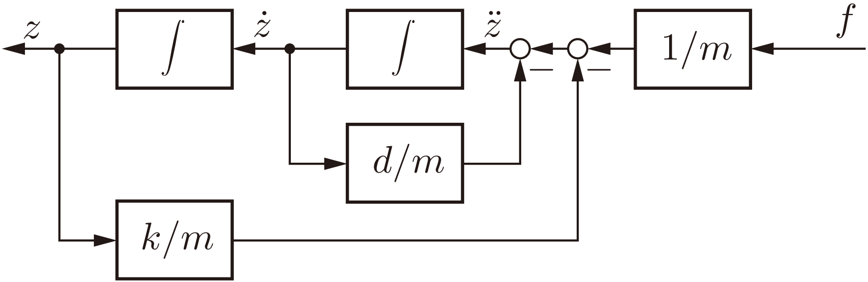
$$\begin{aligned}
N(s) &= b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\
&= b_{n_n}(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_{n_n}) \\
D(s) &= s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\
&= (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{n_d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(G) &= \{\,\text{伝達関数 } G \text{ の零点の全体}\,\} \\
&= \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_n}\} \\
P(G) &= \{\,\text{伝達関数 } G \text{ の極の全体}\,\} \\
&= \{p_1, p_2, \ldots, p_{n_d}\}
\end{aligned}$$

ブロック線図による表現: その 2

マス–バネ–ダンパ系

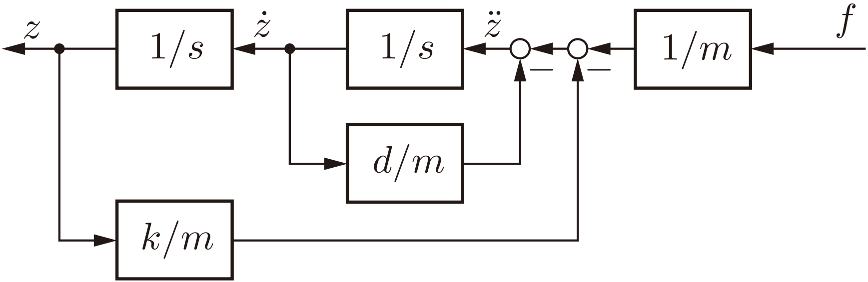
$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$



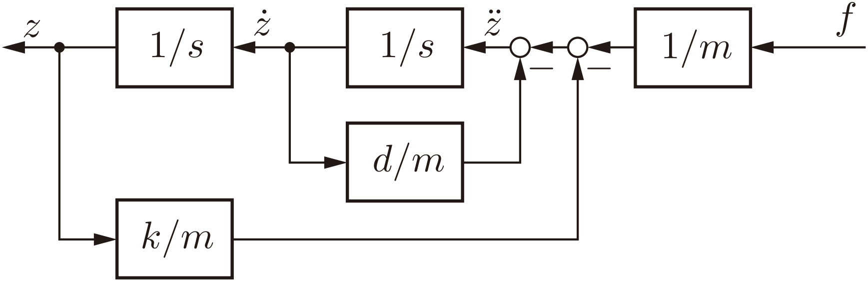
ブロック線図による表現: その 2

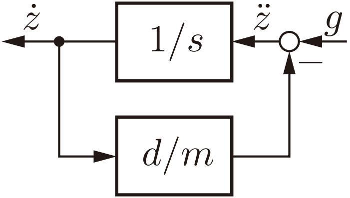
マス–バネ–ダンパ系

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$

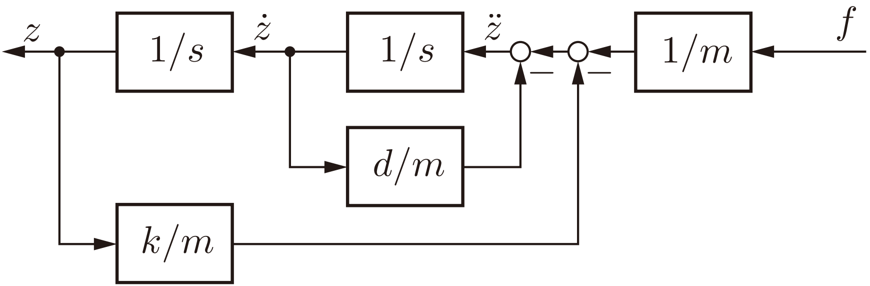


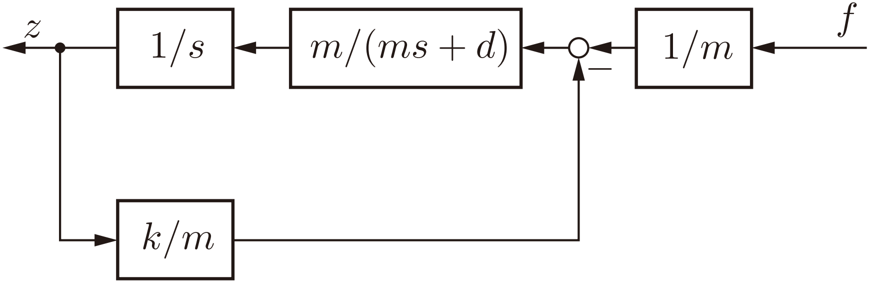
ブロック線図による表現: その 2



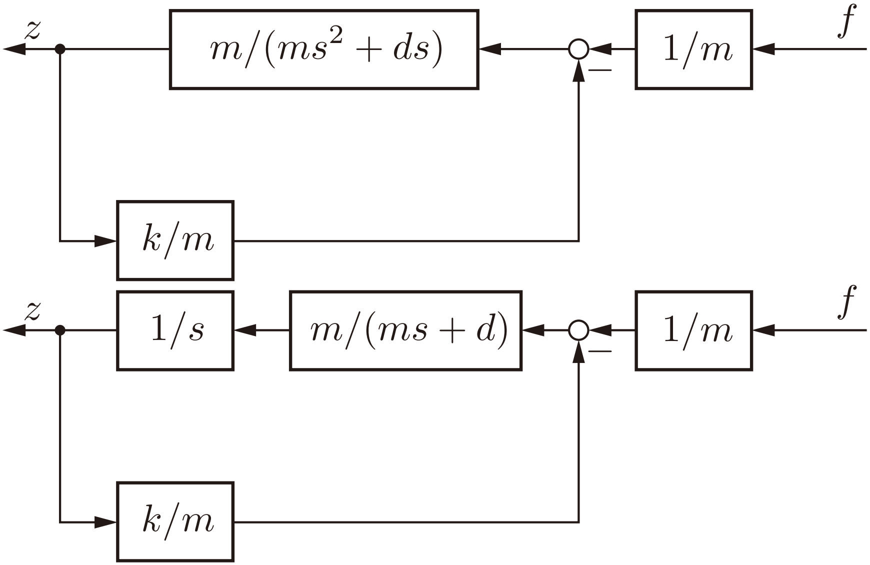


ブロック線図による表現: その 2

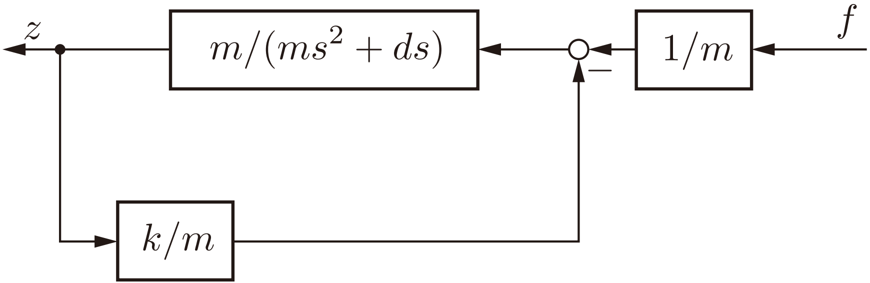


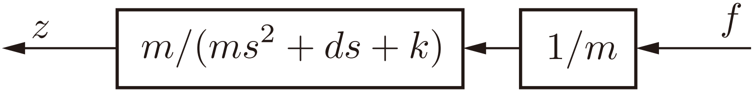


ブロック線図による表現: その 2

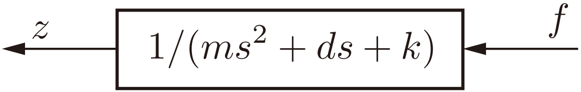


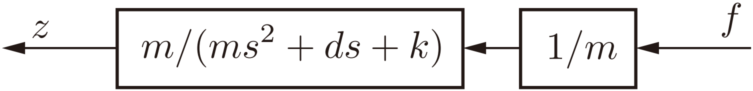
ブロック線図による表現: その 2





ブロック線図による表現: その 2





マス–バネ–ダンパ系

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

- 初期条件を $x(0) = 0$ と仮定して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] &= \mathcal{L}[\,Ax(t) + Bu(t)\,] \\
sx(s) - x(0) &= \mathcal{L}[\,Ax(t)\,] + \mathcal{L}[\,Bu(t)\,] \\
sx(s) &= A\mathcal{L}[\,x(t)\,] + B\mathcal{L}[\,u(t)\,] \\
sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\
sx(s) - Ax(s) &= Bu(s) \\
(sI - A)x(s) &= Bu(s)
\end{aligned}$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

- 初期条件を $x(0) = 0$ と仮定して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] &= \mathcal{L}[\,Ax(t) + Bu(t)\,] \\
sx(s) - x(0) &= \mathcal{L}[\,Ax(t)\,] + \mathcal{L}[\,Bu(t)\,] \\
sx(s) &= A\mathcal{L}[\,x(t)\,] + B\mathcal{L}[\,u(t)\,] \\
sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\
sx(s) - Ax(s) &= Bu(s) \\
(sI - A)x(s) &= Bu(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1}(sI - A)x(s) &= (sI - A)^{-1}Bu(s) \\
Ix(s) &= (sI - A)^{-1}Bu(s) \\
x(s) &= (sI - A)^{-1}Bu(s)
\end{aligned}$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
z(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$

$$
x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, z(t) \,] &= \mathcal{L}[\, Cx(t) \,] \\
z(s) &= C\mathcal{L}[\, x(t) \,] \\
z(s) &= Cx(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= Cx(s) \\
&= C(sI - A)^{-1} Bu(s)
\end{aligned}
$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

$$z(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

マス－バネ－ダンパ系

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

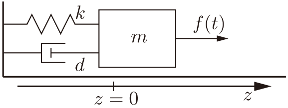
$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{d}{m} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{d}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

状態空間表現と伝達関数

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+\frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s+\frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s+\frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s+\frac{d}{m} + \frac{k}{m})} \begin{bmatrix} s+\dfrac{d}{m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s+\frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{ms^2 + ds + k}
\end{aligned}
$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数

$$\leftarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現

- 表 現:　ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow$　$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$　実現問題

ちょっとまとめ
状態空間表現と伝達関数

状態空間表現

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
z(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$

伝達関数

$$z(s) = G(s)u(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= C\left[\frac{1}{\det(sI - A)}\mathrm{adj}(sI - A)\right]B \\
&= \frac{1}{\det(sI - A)}C\mathrm{adj}(sI - A)B
\end{aligned}
$$

練 習

状態空間表現と伝達関数

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B \end{aligned}$$

答え 1

状態空間表現と伝達関数

$$sI - A = s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{bmatrix} = s(s+2) + 1 = (s+1)(s+1)$$

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \mathrm{adj}\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\mathrm{adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)(s+1)}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

答 え 1

状態空間表現と伝達関数

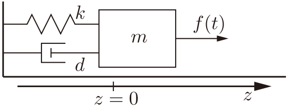
$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{\det(sI - A)} C\mathrm{adj}(sI - A)B \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}(-s-1)) \\
&= \frac{-(s+1)}{(s+1)(s+1)} = -\frac{1}{(s+1)}
\end{aligned}
$$

答え 2

状態空間表現と伝達関数

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+1)} 1 \\
&= \frac{1}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数

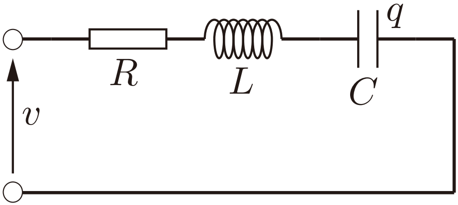
$$\leftarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

状態空間実現

- 表 現:　ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow$ 　$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$ 　実現問題

RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H]
- 抵抗の抵抗値: R [Ω]
- コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V]　　(入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C]　　(出力)
- 初期時刻 t_0 で:　$q(t_0) = q_0$ [q]　　$\dot{q}(t_0) = 0$ [A]

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

RLC 回路

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \qquad \dot{q}(t) = i(t) \qquad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

RLC 回路

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \qquad \dot{q}(t) = i(t) \qquad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \qquad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = v$

RLC 回路

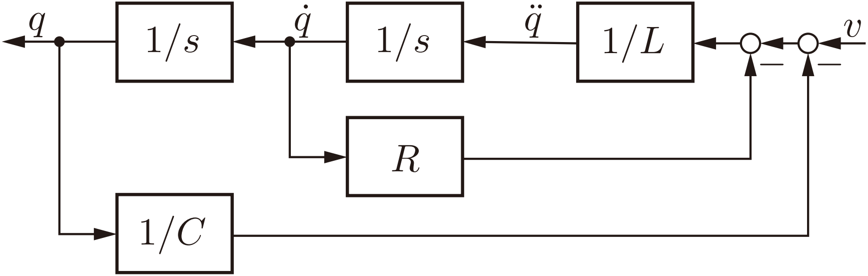
$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t))$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t))$$



RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t))$$

状態変数 $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, q \quad \dot{q} \,]^{\mathrm{T}}$

RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t))$$

状態変数 $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, q \quad \dot{q} \,]^{\mathrm{T}}$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}v(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t)\right)$$

状態変数 $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, q \quad \dot{q} \,]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{q}(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \ddot{q}(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}v(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = [\, q_0 \quad 0 \,]^{\mathrm{T}} \\
z(t) &= Cx(t) \qquad t \geq t_0
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C = [\, 1 \quad 0 \,] \quad u = v$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

- 初期条件を $q(t_0) = 0$, $\dot{q}(t_0) = 0$, $t_0 = 0$ と仮定して

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

$$\mathcal{L}[\, L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) \,] = \mathcal{L}[\, v(t) \,]$$

$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})q(s) = v(s)$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

- 初期条件を $q(t_0) = 0$, $\dot{q}(t_0) = 0$, $t_0 = 0$ と仮定して

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

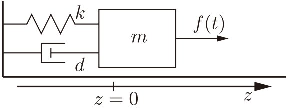
$$\mathcal{L}[\,L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)\,] = \mathcal{L}[\,v(t)\,]$$

$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})q(s) = v(s)$$

$$q(s) = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}v(s)$$

$$G(s) = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数

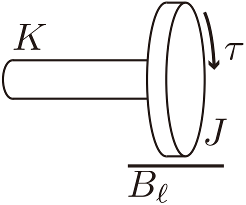
$$\leftarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

状態空間実現

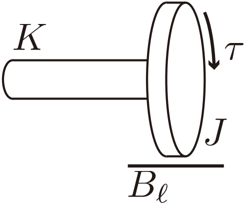
- 表 現: ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow$ $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$ 実現問題

回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm]　　(入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad]　　(出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad]　　$\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない

回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm]　　(入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad]　　(出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad]　　$\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \qquad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = \tau$

回転運動

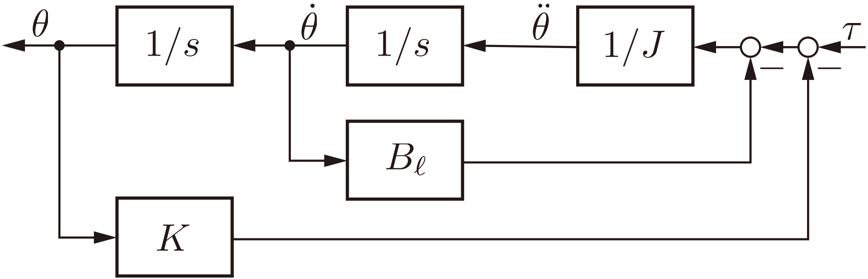
$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \qquad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

回転運動

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \qquad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$



回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, \theta \quad \dot{\theta} \,]^{\mathrm{T}}$

回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, \theta \quad \dot{\theta} \,]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = -\frac{K}{J}x_1(t) - \frac{B_\ell}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}\tau(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau(t)$$

回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [\, x_1 \quad x_2 \,]^{\mathrm{T}} = [\, \theta \quad \dot{\theta} \,]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = -\frac{K}{J}x_1(t) - \frac{B_\ell}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}\tau(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = [\, \theta_0 \quad \omega_0 \,]^{\mathrm{T}} \\
z(t) &= Cx(t) \qquad t \geq t_0
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = [\, 1 \quad 0 \,] \quad u = \tau$$

回転運動

ラプラス変換 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}$$

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \mathrm{adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix}$$

回転運動

ラプラス変換 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}$$

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \mathrm{adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

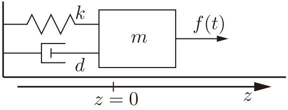
回転運動

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J} + \frac{K}{J})} \begin{bmatrix} s + \dfrac{B_\ell}{J} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \frac{1}{J} \\
&= \frac{1}{Js^2 + B_\ell s + K}
\end{aligned}
$$

動的なシステムのモデリングと表現
ラプラス変換の復習
動的なシステムの応答
06/04 中間試験

動的なシステムの安定性
動的なシステムの周波数応答
周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/30 期末試験

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数

$$\leftarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

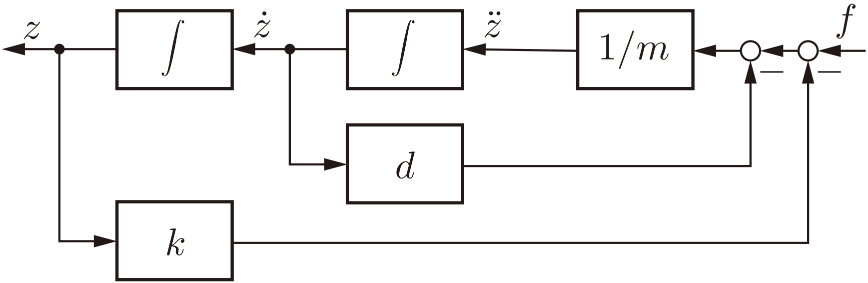
状態空間実現

- 表 現:　ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow$ 　$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$ 　実現問題

マス–バネ–ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

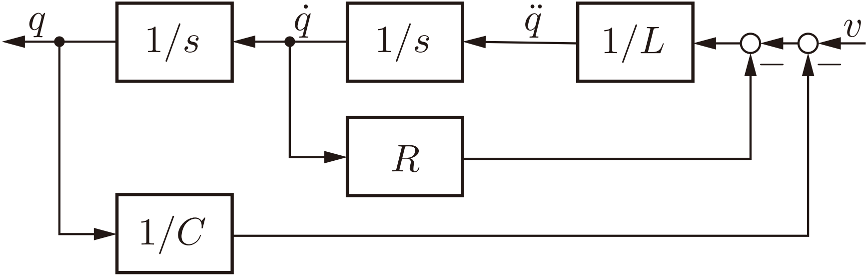
$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$



RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

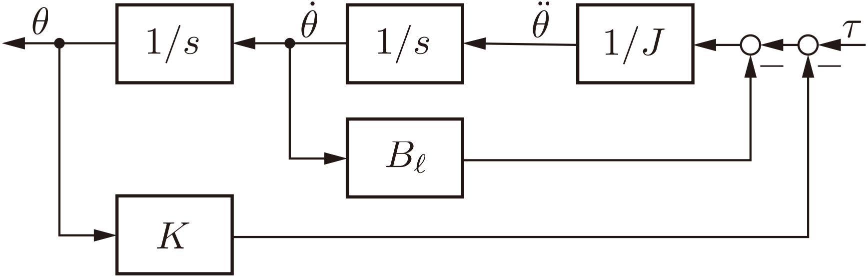
$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t))$$



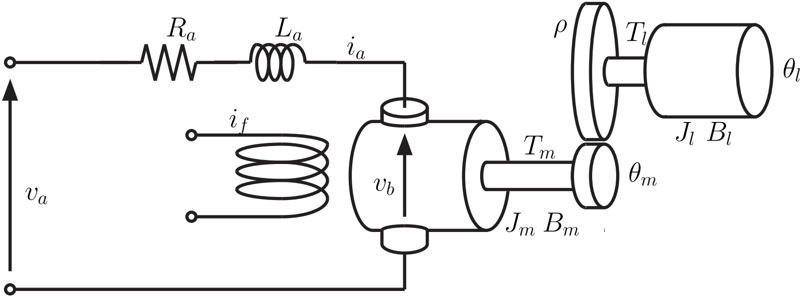
回転運動

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$



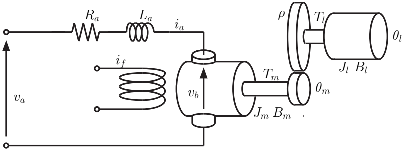
DC モータ



記号	単位	意味
θ_m	[rad]	モータ回転角
ω_m	[rad/s]	モータ角速度
v_a	[V]	電機子電圧
i_a	[A]	電機子電流
L_a	[H]	電機子インダクタンス
R_a	[Ω]	電機子抵抗
T_m	[Nm]	モータ発生トルク
k_T	[Nm/A]	トルク定数
v_b	[V]	逆起電力
k_b	[Vs/rad]	逆起電力定数

記号	単位	意味
J_m	[kgm^2]	モータ側慣性モーメント
B_m	[Nms/rad]	モータ側粘性抵抗
A	–	アンプ増幅率
u	[V]	入力電圧
ρ	–	減衰比
θ_ℓ	[rad]	負荷回転角
ω_ℓ	[rad/s]	負荷角速度
T_ℓ	[Nm]	負荷側トルク
J_ℓ	[kgm^2]	負荷側慣性モーメント
B_ℓ	[Nms/rad]	負荷側粘性抵抗

DC モータ



$$
\begin{aligned}
v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b \\
v_b &= k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m \\
v_a &= Au \qquad (u \text{ 入力}) \\
T_m &= J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell \\
&= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell \\
T_m &= k_T i_a \\
T_\ell &= J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt} \\
&= J_\ell \dot{\omega}_m(t) + B_\ell \omega_\ell(t) \\
\theta_m &= \rho \theta_\ell \qquad (z = \theta_\ell \text{ 出力}) \\
\omega_m &= \dot{\theta}_m = \rho \dot{\theta}_\ell = \rho \omega_\ell
\end{aligned}
$$

DC モータ

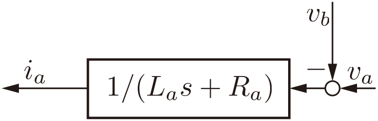
$$
\begin{aligned}
v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b \\
v_b &= k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m \\
v_a &= Au \qquad (u \text{ 入力}) \\
T_m &= J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell \\
&= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell \\
T_m &= k_T i_a \\
T_\ell &= J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt} \\
&= J_\ell \dot{\omega}_m(t) + B_\ell \omega_\ell(t) \\
\theta_m &= \rho \theta_\ell \qquad (z = \theta_\ell \text{ 出力}) \\
\omega_m &= \dot{\theta}_m = \rho \dot{\theta}_\ell = \rho \omega_\ell
\end{aligned}
$$

DC モータ

$$
\begin{aligned}
i_a(s) &= \frac{1}{L_a s + R_a}(v_a(s) - v_b(s)) \\
v_b(s) &= k_b \omega_m(s) \\
v_a(s) &= Au(s) \\
\omega_m(s) &= \frac{1}{J_m s + B_m}(T_m(s) - T_\ell(s)) \\
T_m(s) &= k_T i_a(s) \\
T_\ell(s) &= (J_\ell s + B_\ell)\omega_\ell(s) \\
\omega_\ell(s) &= \frac{1}{\rho}\omega_m(s) \\
\theta_\ell(s) &= \frac{1}{s}\omega_\ell(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b \\
v_b &= k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m \\
v_a &= Au \qquad (u\ \text{入力}) \\
T_m &= J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell \\
&= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell \\
T_m &= k_T i_a \\
T_\ell &= J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt} \\
&= J_\ell \dot{\omega}_m(t) + B_\ell \omega_\ell(t) \\
\theta_m &= \rho\theta_\ell \qquad (z = \theta_\ell\ \text{出力}) \\
\omega_m &= \dot{\theta}_m = \rho\dot{\theta}_\ell = \rho\omega_\ell
\end{aligned}
$$

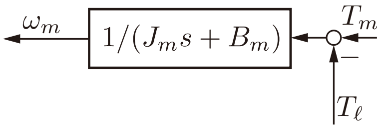
DC モータ



a 電気回路

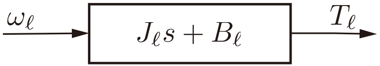
b 逆起電力

c アンプ

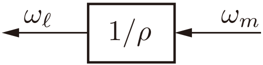


d 電機子回転運動

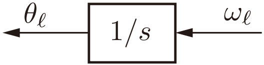
e 発生トルク



f 負荷回転運動

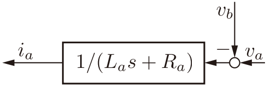


g 減速機

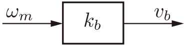


h 積分器

DC モータ

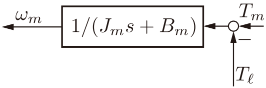


a 電気回路

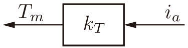


b 逆起電力

c アンプ

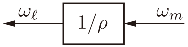


d 電機子回転運動

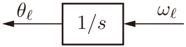


e 発生トルク

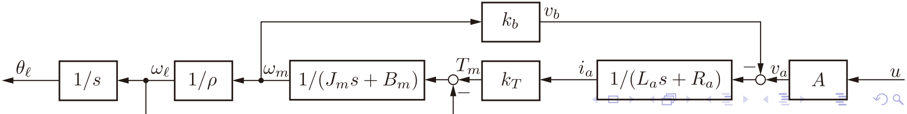
f 負荷回転運動



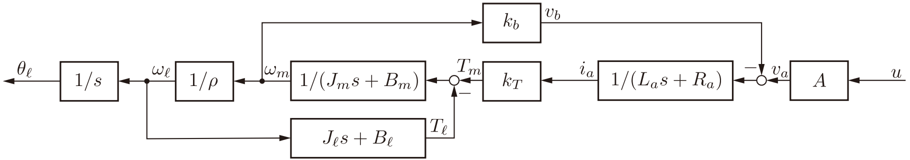
g 減速機

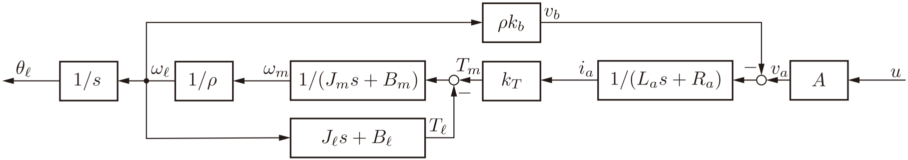


h 積分器

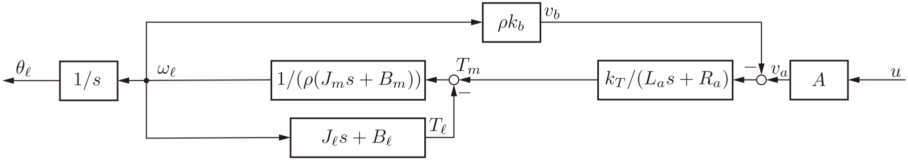


DC モータ



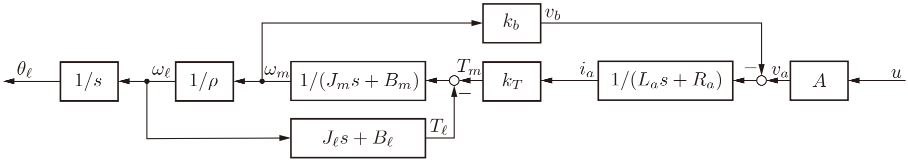


a ブロック線図の変形 1



b ブロック線図の変形 2

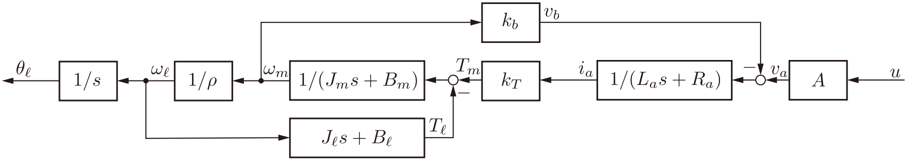
DC モータ



$$z(s) = G(s)u(s)$$

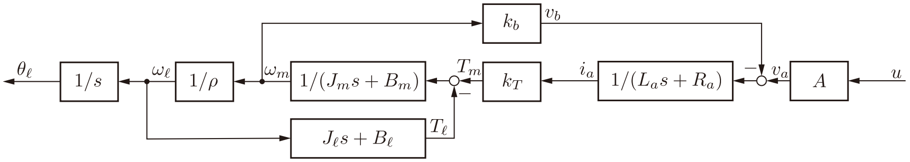
$$G(s) = \frac{k_T A}{s\left(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b\right)}$$

DC モータ



$$G(s) = \frac{k_T A}{s\,(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b)}$$

DC モータ



$$G(s) = \frac{k_T A}{s\left(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b\right)}$$

$L_a = 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k_T A}{s\left(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))R_a + \rho K_T k_b\right)} \\ &= \frac{k_T A / R_a}{s\left((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b / R_a\right)} \\ &= \frac{k_T A / R_a}{(\rho J_m + J_\ell)s^2 + ((\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b / R_a)s} \end{aligned}$$

DC モータ

$$G(s) = \frac{k_T A / R_a}{(\rho J_m + J_\ell)s^2 + ((\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b / R_a)s}$$

$$K = \frac{k_T A}{R_a} \qquad J = \rho J_m + J_l \qquad B = \rho B_m + B_l + \frac{\rho k_T k_b}{R_a}$$

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

DC モータ

$$G(s) = \frac{k_T A/R_a}{(\rho J_m + J_\ell)s^2 + ((\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b/R_a)s}$$

$$K = \frac{k_T A}{R_a} \qquad J = \rho J_m + J_l \qquad B = \rho B_m + B_l + \frac{\rho k_T k_b}{R_a}$$

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

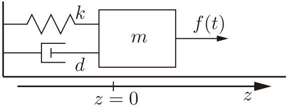
さらに $G(s) = \dfrac{K/J}{s^2 + (B/J)s}$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}, \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$$

システム制御工学 I　　動的なシステムの解析

	動的なシステムのモデリングと表現
	ラプラス変換の復習
	動的なシステムの応答
06/04	中間試験
	動的なシステムの安定性
	動的なシステムの周波数応答
	周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/30	期末試験

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム

$$\downarrow$$

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t)$$ 微分方程式

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数

$$\leftarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Cx(t)$$

状態空間実現

- 表 現: ブロック線図による表現は，とても大切です
- $\leftarrow \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- $\rightarrow$ 実現問題