

# システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/04 中間試験

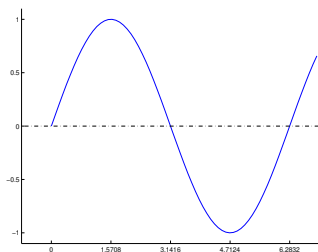
動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

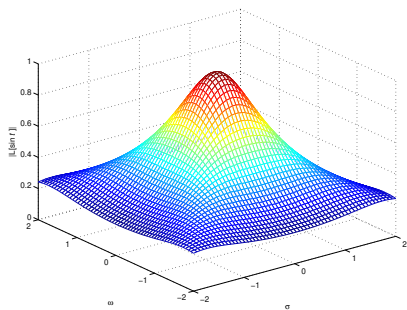
周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/30 期末試験

# ラプラス変換の復習



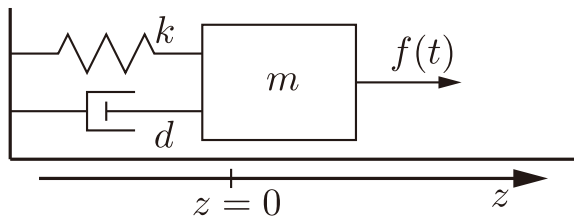
$\sin t$



$|\mathcal{L}[\sin t]|$

# なぜラプラス変換を考えるのか

## マス-バネ-ダンパ系

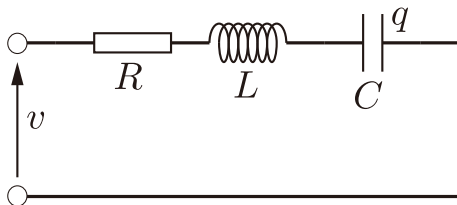


$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad u = f$$

- 外部から加わる力:  $f(t)$  [N]    入力 (原因)
- 質点の位置:  $z(t)$  [m]    出力 (結果)

# なぜラプラス変換を考えるのか

## RLC 回路

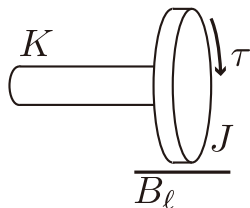


$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad u = v$$

- 加える電圧:  $v(t)$  [V]      入力
- コンデンサに蓄えられる電荷:  $q$  [C]      出力

# なぜラプラス変換を考えるのか

## 回転運動



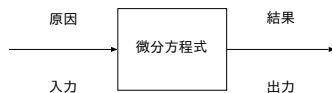
$$J\ddot{\theta}(t) + B_l\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \quad u = \tau$$

- 外部から加わるトルク:  $\tau(t)$  [Nm]      入力
- 回転体の回転角度:  $\theta(t)$  [rad]      出力

# なぜラプラス変換を考えるのか

工学の問題の多くは、微分方程式で記述される

- 機械, 電気, 材料, 熱, 流体, 生物, 通信, 金融 などなど



Engineer は, 微分方程式を解きたい

# なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:  $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

# なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:  $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$n$  階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$



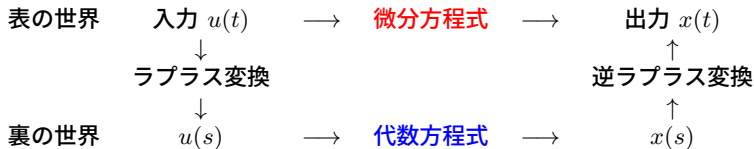
# なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:  $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$n$  階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$



# ラプラス変換の定義

定義: ラプラス変換

時間関数  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  (ただし  $t < 0$  の時は  $x(t) = 0$  とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$x(t)$ : 時間関数

$x(s)$ :  $x(t)$  のラプラス変換

$s$ : 複素数  $s = \sigma + j\omega$

より正確には 
$$\mathcal{L}_-[x(t)] = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

# 注意

## ラプラス変換の定義

本来なら関数  $x(t)$  のラプラス変換を表す記号

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \qquad \tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

- 記号が煩雑になる
- 関数  $x(t)$  を考えているのか, あるいはそのラプラス変換  $x(s)$  を考えているのかは, 前後の文脈から明らか

あえて  $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  のように表記する.

# ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$t$ : 時間 (実数)

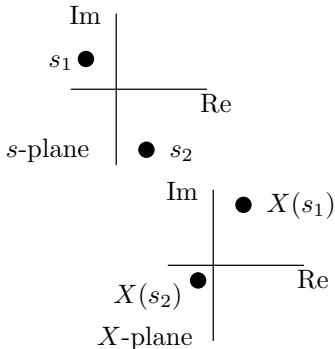
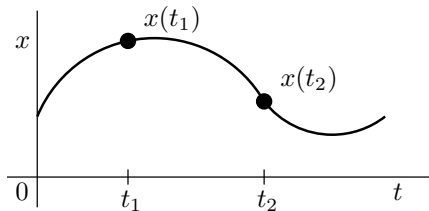
$x(t)$ : 各  $t$  に対して  $x(t)$  は実数

$s$ : 複素数  $s = \sigma + j\omega$

$x(s)$ : 各  $s$  に対して  $x(s)$  は複素数

ラプラス変換:  $\mathcal{L}[\cdot]$

$\Rightarrow$

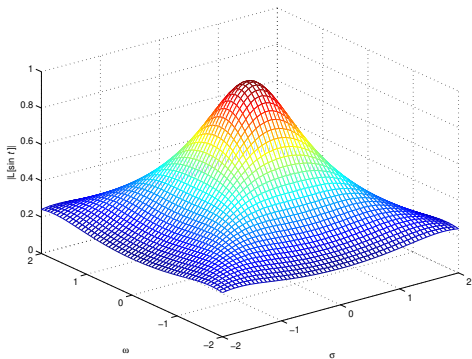


# ラプラス変換の定義

例えば,  $|x(s)|$  ならグラフにできる

例題:  $\sin t$       $x(t) = \sin t$       $x(s) = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$

$$|x(s)| = |x(\sigma + j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^2}}$$



$$|\mathcal{L}[\sin t]|$$

# ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- すべての時間関数  $x(t)$  がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数  $s$  を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数  $x(t)$  でも, すべての複素数  $s$  について積分が収束するわけではない
  - ラプラス変換の収束領域:  $\text{Re}[s] > \alpha$

# ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- すべての時間関数  $x(t)$  がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数  $s$  を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数  $x(t)$  でも, すべての複素数  $s$  について積分が収束するわけではない
  - ラプラス変換の収束領域:  $\text{Re}[s] > \alpha$
- 多くの関数 (指数オーダーの関数) がラプラス変換可能
- ラプラス変換の利用 (微分方程式を解く際に) 収束領域を陽に考慮する必要はない
  - ラプラス変換には, 深い理論があります. ぜひ, 参考図書に目をとおしてください.

# 基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

ステップ関数:  $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

収束領域:  $\operatorname{Re}[s] > 0$



## 基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

指数関数:  $e^{-at}$  ( $a > 0$ )

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

収束領域:  $\text{Re}[s] > -a$

## 基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

正弦関数:  $\sin \omega t$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式:  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

# 基本的な関数のラプラス変換

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

余弦関数:  $\cos \omega t$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式:  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

# 基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

ランプ関数:  $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{s^2}$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x) \dot{g}(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x) dx$$

# ラプラス変換の復習

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

インパルス関数:  $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$\delta(t)$  の性質:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$  ( $f(t)$ : 時間関数)

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

# ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

線形性

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = ax(s) + by(s)$$

# ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x)\dot{g}(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x)dx$$

# ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

## 時間微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sy(s) - y(0) \\ &= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0) \\ &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$



# ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}[x(t)] = x(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right] = s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^4x(t)}{dt^4}\right] = s^4x(s) - s^3x(0) - s^2\dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - \ddot{\dot{x}}(0)$$

⋮

# ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

## 時間積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} x(s)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad y(0) = \int_0^0 x(\tau) d\tau = 0$$

# ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} x(s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\tau} x(\tau_1) d\tau_1 d\tau\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} y(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\int_0^{\tau} x(\tau_1) d\tau_1\right] \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{s} x(s) = \frac{1}{s^2} x(s) \end{aligned}$$

# ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}[x(t)] = x(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} x(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau\right] = \frac{1}{s^2} x(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau\right] = \frac{1}{s^3} x(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} x(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 d\tau\right] = \frac{1}{s^4} x(s)$$

⋮

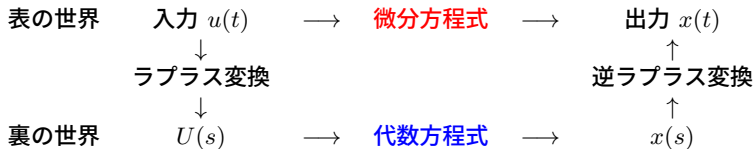
# ラプラス変換の性質

**微分:**  $s$  をかけること

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

**積分:**  $\frac{1}{s}$  をかけること

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$$



# ラプラス変換の性質

時間領域推移

$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-\tau s} \mathcal{L}[x(t)]$$

$s$  領域推移

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = x(s + a)$$

時間スケーリング

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a} x\left(\frac{s}{a}\right)$$

# ラプラス変換の性質

$s$  領域での微分

$$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{d}{ds}x(s)$$

畳み込み積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)]$$

# ラプラス変換の性質

## 最終値の定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sx(s)$$

## 初期値の定理

$$x(0+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sx(s)$$



# ラプラス変換と微分方程式

例題 1.  $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ ,  $x(0) = 3$  の解を求める.

$$x(s) = 3 \frac{1}{s+2} \qquad x(t) = 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

# ラプラス変換と微分方程式

例題 2.  $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$ ,  $x(0) = 3$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{3s + 1}{s(s + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s + 2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} u(t) + \frac{5}{2} e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0)$$

ステップ入力  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$        $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$

$$\frac{3s + 1}{s(s + 2)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + 2}$$

## ラプラス変換と微分方程式

**例題 3.**  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  の解を求めよ.

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = 4\frac{1}{s+1} - 3\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{s+2}$$

## ラプラス変換と微分方程式

例題 4.  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s+1} - \frac{5}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} u(t) + 3e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s+1} + C \frac{1}{s+2}$$

## ラプラス変換と微分方程式

例題 5.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0, \dot{x}(0) = 3, x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = e^{-t} + 4te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)^2} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{(s+1)^2}$$

## ラプラス変換と微分方程式

例題 6.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$ ,  $\dot{x}(0) = 3$ ,  $x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + 3\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = u(t) + 3te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{(s+1)^2}$$

## ラプラス変換と微分方程式

例題 7.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -1$ ,  $x(0) = 1$  の解を求め.

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$$

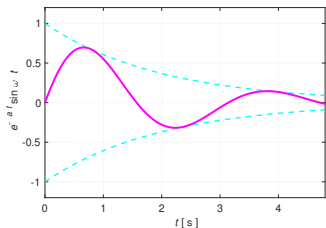
$$x(t) = e^{-t} \cos 3t$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

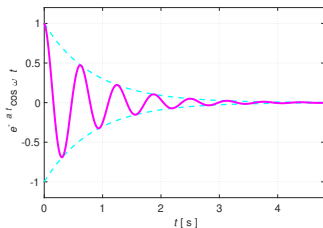
$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-at} \sin \omega t \quad e^{-at} \cos \omega t$$



**a**  $e^{-at} \sin \omega t$ ,  $a = 0.5$ ,  $\omega = 2$

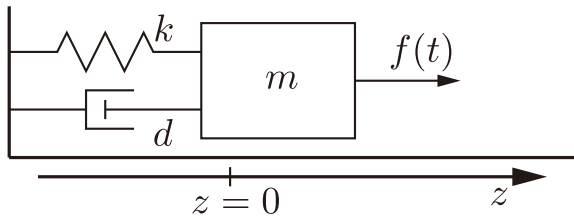


**b**  $e^{-at} \cos \omega t$ ,  $a = 1.2$ ,  $\omega = 10$



# ラプラス変換と伝達関数

## マス-バネ-ダンパ系

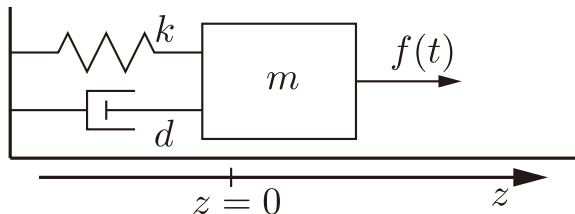


$$m\ddot{z}(t) = f(t) - kz(t) - d\dot{z}(t)$$

- 外部から加わる力:  $f(t)$  [N]    入力 (原因)
- 質点の位置:  $z(t)$  [m]    出力 (結果)

# ラプラス変換と伝達関数

## マス-バネ-ダンパ系



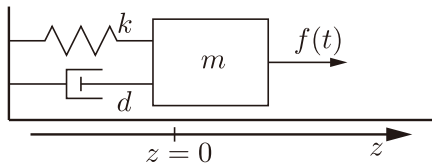
$$m\ddot{z}(t) = f(t) - kz(t) - d\dot{z}(t)$$

- ラプラス変換して:

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{z}(t)] = sz(s) - z(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{z}(t)] = s^2z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

# ラプラス変換と伝達関数



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0)$$

入力  $f$  から  $z$  への伝達関数

$$\frac{1}{ms^2 + ds + k}$$

初期条件  $\dot{z}(0)$  から  $z$  への伝達関数

$$\frac{m}{ms^2 + ds + k}$$

初期条件  $z(0)$  から  $z$  への伝達関数

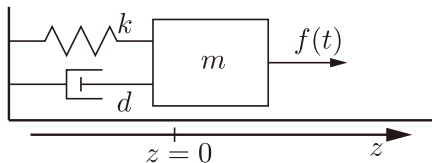
$$\frac{ms + d}{ms^2 + ds + k}$$

特性多項式  $ms^2 + ds + k$

特性方程式  $ms^2 + ds + k = 0$

# ラプラス変換と伝達関数

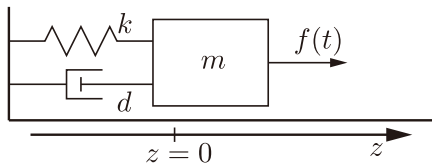
例題 1.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1, d = 3, k = 2$  の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

# ラプラス変換と伝達関数

例題 1.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1, d = 3, k = 2$  の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

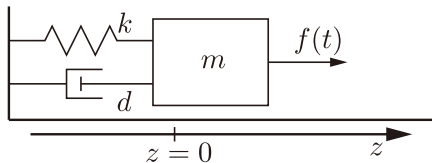
$$z(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = 2 \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$$z(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

- $d = 3 \neq 0$ : 減衰あり (ブレーキが掛かる  $\rightarrow e^{-t}, e^{-2t}$ )
- $ms^2 + ds + k = 0$  が、相異なる実数根 ( $s = -1, -2$ ) をもつ場合

# ラプラス変換と伝達関数

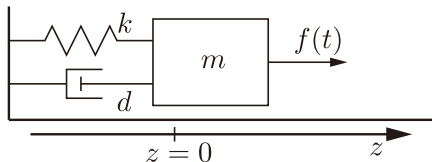
例題 2.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1, d = 0, k = 4$  の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

# ラプラス変換と伝達関数

例題 2.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1, d = 0, k = 4$  の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

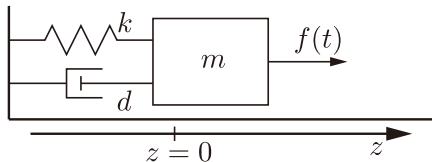
$$z(s) = \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 2^2}$$

$$z(t) = \cos 2t$$

- $d = 0$ : 減衰なし (ブレーキが掛からないので, 動き続ける)
- $ms^2 + ds + k = 0$  が, 虚数 (の共役) 根 ( $s = \pm 2j$ ) をもつ場合

# ラプラス変換と伝達関数

例題 3.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1$ ,  $d = 2$ ,  $k = 5$  の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}$$



# ラプラス変換と伝達関数

- $$z(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

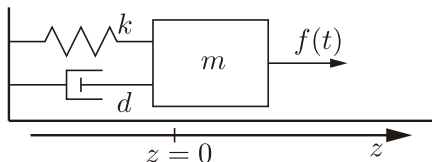
$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

$$z(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

# ラプラス変換と伝達関数

例題 3.  $f(t) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  かつ  $m = 1, d = 2, k = 5$  の時の解



$$Z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$z(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

- $d = 2 \neq 0$ : 減衰あり (ブレーキが掛かる  $\rightarrow e^{-t}$ )
- $ms^2 + ds + k = 0$  が、複素 (共役) 根 ( $s = -1 \pm 2j$ ) をもつ場合

# システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/04 中間試験

動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/30 期末試験