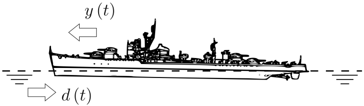
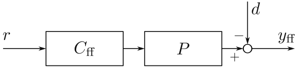
1. 資料 演習問題 10.1
2. 資料 演習問題 10.2
3. 資料 演習問題 11.1
4. 資料 演習問題 11.2
5. 資料 演習問題 11.3
6. 資料 演習問題 11.4
7. 資料 演習問題 11.6

演習問題 10.1

Fig. 10.26 に示すラジコン船の制御にあたり，Fig. 10.27 に示す 2 つの制御系を考える．ここで，制御対象 $P = 8$，目標値 $r(t) = 6.00$ [m/s] とする．

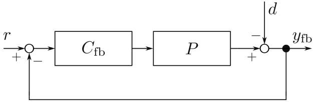


$y(t)$　出力（ラジコン船の速度）
$d(t)$　外乱（水流）
$r(t)$　目標値（目標の速度）



$$C_{\sf ff} = 1/8$$

a フィードフォワード制御系

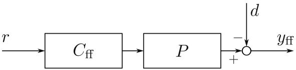


$$C_{\sf fb} = 8$$

b フィードバック制御系

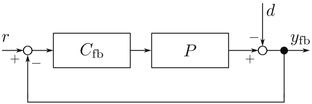
演習問題 10.1

1. 外乱がない（$d = 0$）場合の出力 $y_{\mathrm{ff}}(t)$，$y_{\mathrm{fb}}(t)$ を求めなさい．
2. 進行方向と逆向きの水流（外乱）$d(t) = 1.00$ [m/s] が生じた．このときの出力 $\hat{y}_{\mathrm{ff}}(t)$，$\hat{y}_{\mathrm{fb}}(t)$ を求めなさい．
3. 外乱はなくなったが，ラジコン船に荷物を載せたことで制御対象の特性が変動してしまった．変動後の制御対象を $\tilde{P} = 7$ とし，出力 $\tilde{y}_{\mathrm{ff}}(t)$, $\tilde{y}_{\mathrm{fb}}(t)$ を求めなさい．



$$C_{\mathrm{ff}} = 1/8$$

a フィードフォワード制御系



$$C_{\mathrm{fb}} = 8$$

b フィードバック制御系

演習問題 10.1

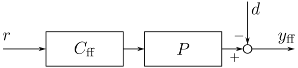
1. 外乱がない（$d=0$）場合の出力 $y_{\mathrm{ff}}(t)$，$y_{\mathrm{fb}}(t)$ を求めなさい.

フィードフォワード制御系:

$y_{\mathrm{ff}} = PC_{\mathrm{ff}}r = 8 \times (1/8)r = r$ より, $y_{\mathrm{ff}} = r = 6.00\ [\,\mathrm{m/s}\,]$ となる.

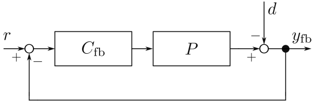
フィードバック制御系:

$y_{\mathrm{fb}} = PC_{\mathrm{fb}}(r - y_{\mathrm{fb}})$ より, $y_{\mathrm{fb}} = (PC_{\mathrm{fb}})/(1 + PC_{\mathrm{fb}})r$ となる.
よって $y_{fb} = (8 \times 8)/(1 + 8 \times 8)r = 64/65r$ より,
$y_{fb} = (64/65) \times 6.00 \approx 5.90\ [\,\mathrm{m/s}\,]$ となる.



$C_{\mathrm{ff}} = 1/8$

a フィードフォワード制御系



$C_{\mathrm{fb}} = 8$

b フィードバック制御系

演習問題 10.1

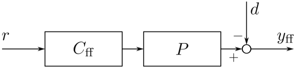
2. 進行方向と逆向きの水流（外乱）$d\,(t) = 1.00$ [m/s] が生じた．このときの出力 $\hat{y}_{\text{ff}}\,(t)$，$\hat{y}_{\text{fb}}\,(t)$ を求めなさい．

フィードフォワード制御系:

$\hat{y}_{\text{ff}} = PC_{\text{ff}}r - d = r - d$ より，$\hat{y}_{\text{ff}} = 6.00 - 1.00 = 5.00$ [m/s] となる．

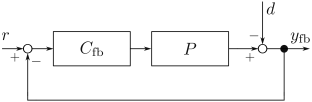
フィードバック制御系:

$\hat{y}_{\text{fb}} = PC_{\text{fb}}(r - \hat{y}_{\text{fb}}) - d$ より，
$\hat{y}_{\text{fb}} = (PC_{\text{fb}})/(1 + PC_{\text{fb}})r - 1/(1 + PC_{\text{fb}})d$ となる．
よって $y_{fb} = 64/65r - 1/64d$ より，
$y_{fb} = (64/65) \times 6.00 - (1/64) \times 1 \approx 5.89$ [m/s] となる．



$C_{\text{ff}} = 1/8$

a フィードフォワード制御系



$C_{\text{fb}} = 8$

b フィードバック制御系

演習問題 10.1

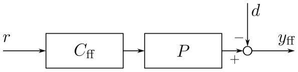
3. 外乱はなくなったが，ラジコン船に荷物を載せたことで制御対象の特性が変動してしまった．変動後の制御対象を $\tilde{P}=7$ とし，出力 $\tilde{y}_{\mathrm{ff}}(t)$, $\tilde{y}_{\mathrm{fb}}(t)$ を求めなさい．

フィードフォワード制御系:

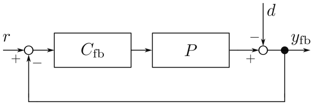
$\tilde{y}_{\mathrm{ff}}=\tilde{P}C_{\mathrm{ff}}r=7\times(1/8)r$ より，$\tilde{y}_{\mathrm{ff}}=7\times(1/8)\times 6.00=5.25\ [\,\mathrm{m/s}\,]$ となる．

フィードバック制御系:

$\tilde{y}_{\mathrm{fb}}=\tilde{P}C_{\mathrm{fb}}(r-\tilde{y}_{\mathrm{fb}})$ より，$y_{\mathrm{fb}}=(\tilde{P}C_{\mathrm{fb}})/(1+\tilde{P}C_{\mathrm{fb}})r$ となる．よって
$\tilde{y}_{fb}=(7\times 8)/(1+7\times 8)r=56/57r$ より，
$\tilde{y}_{fb}=(56/57)\times 6.00\approx 5.89\ [\,\mathrm{m/s}\,]$ となる．



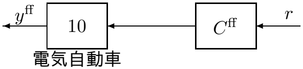
$C_{\mathrm{ff}}=1/8$

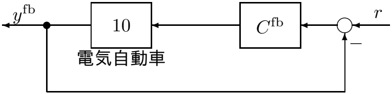


$C_{\mathrm{fb}}=8$

演習問題 10.2

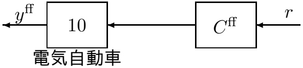
1 A の入力電流毎に 10 m/s の速度がでる電気自動車の制御を考える. Fig. 10.28 のフィードフォワード制御系およびフィードバック制御系について, 以下の問に答えなさい. ただし, $C^{\mathrm{ff}} = \dfrac{1}{10}$ および $C^{\mathrm{fb}} = 100$ であり, 目標値 r は 5 m/s の定数とする.

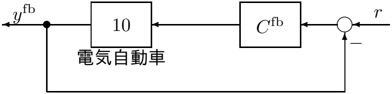




演習問題 10.2

1. フィードフォワード制御系における入力 r から出力 y^{ff} までの伝達関数 T^{ff} を求めよ.
2. フィードフォワード制御系の出力 y^{ff} $[\,\mathrm{m/s}\,]$ を求めよ.
3. フィードバック制御系における入力 r から出力 y^{fb} までの伝達関数 T^{fb} を求めよ.
4. フィードバック制御系の出力 y^{fb} $[\,\mathrm{m/s}\,]$ を求めよ.
5. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ, $1\ \mathrm{A}$ の入力電流毎に $6\ \mathrm{m/s}$ の速度しか出なくなった. このときのフィードフォワード制御系の伝達関数 $\hat{T}^{\mathrm{ff}}$ および出力 $\hat{y}^{\mathrm{ff}}$ $[\,\mathrm{m/s}\,]$ を求めよ.





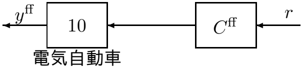
演習問題 10.2

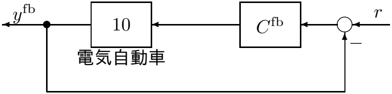
6. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ, 1 A の入力電流毎に 6 m/s の速度しか出なくなった. このときのフィードバック制御系の伝達関数 $\hat{T}^{\mathrm{fb}}$ および出力 $\hat{y}^{\mathrm{fb}}$ [m/s] を求めよ.
7. 制御対象 P の相対的な変動率 ΔP, T^{ff} の相対的な変動率 ΔT^{ff} および T^{fb} の相対的な変動率 ΔT^{fb}

$$\Delta P = \frac{10-6}{6} \qquad \Delta T^{\mathrm{ff}} = \frac{T^{\mathrm{ff}} - \hat{T}^{\mathrm{ff}}}{\hat{T}^{\mathrm{ff}}} \qquad \Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{T^{\mathrm{fb}} - \hat{T}^{\mathrm{fb}}}{\hat{T}^{\mathrm{fb}}}$$

を考える.

   1. ΔP と ΔT^{ff} の関係を論ぜよ.
   2. ΔP と ΔT^{fb} の関係を論ぜよ.

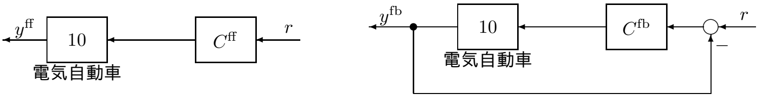




演習問題 10.2

1. フィードフォワード制御系における入力 r から出力 y^{ff} までの伝達関数 T^{ff} を求めよ.

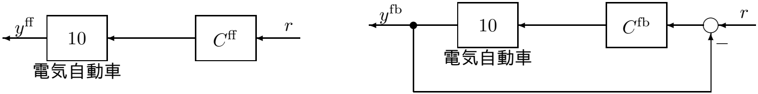
$y^{\mathrm{ff}} = PC^{\mathrm{ff}} r$ より, $T^{\mathrm{ff}} = PC^{\mathrm{ff}} = 10 \times (1/10) = 1.$



演習問題 10.2

2. フィードフォワード制御系の出力 y^{ff} [m/s] を求めよ.

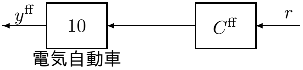
$$y^{\mathrm{ff}} = T^{\mathrm{ff}} r = r = 5 \; [\,\mathrm{m/s}\,].$$

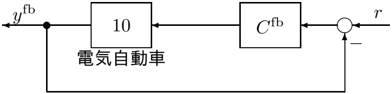


演習問題 10.2

3. フィードバック制御系における入力 r から出力 y^{fb} までの伝達関数 T^{fb} を求めよ.

$y^{\mathrm{fb}} = PC^{\mathrm{fb}}(r - y^{\mathrm{fb}})$ より, $y^{\mathrm{fb}} = (PC^{\mathrm{fb}})/(1 + PC^{\mathrm{fb}})r$ となる.
よって
$T^{\mathrm{fb}} = (PC^{\mathrm{fb}})/(1 + PC^{\mathrm{fb}}) = (10 \times 100)/(1 + 10 \times 100) = 1000/1001.$

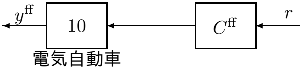


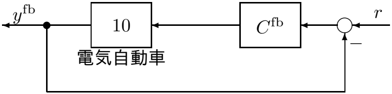


演習問題 10.2

4. フィードバック制御系の出力 y^{fb} [m/s] を求めよ.

$$y^{\mathrm{fb}} = T^{\mathrm{fb}} r = (1000/1001) \times 5 \approx 5 \text{ [m/s]}.$$



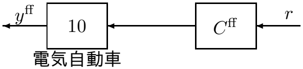


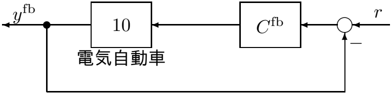
演習問題 10.2

5. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ，1 A の入力電流毎に 6 m/s の速度しか出なくなった．このときのフィードフォワード制御系の伝達関数 $\hat{T}^{\mathrm{ff}}$ および出力 $\hat{y}^{\mathrm{ff}}$ [m/s] を求めよ．

$\hat{T}^{\mathrm{ff}} = \hat{P}C^{\mathrm{ff}}$ より，$\hat{T}^{\mathrm{ff}} = 6 \times (1/10) = 0.6.$

$\hat{y}^{\mathrm{ff}} = \hat{T}^{\mathrm{ff}} r$ より，$\hat{y}^{\mathrm{ff}} = 0.6 \times 5 = 3.0$ [m/s].



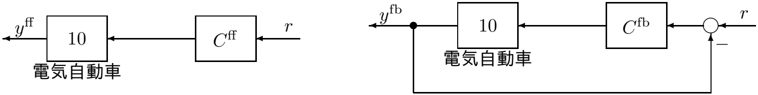


演習問題 10.2

6. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ, 1 A の入力電流毎に 6 m/s の速度しか出なくなった. このときのフィードバック制御系の伝達関数 $\hat{T}^{\mathrm{fb}}$ および出力 $\hat{y}^{\mathrm{fb}}$ [m/s] を求めよ.

$\hat{T}^{\mathrm{fb}} = (\hat{P}C^{\mathrm{fb}})/(1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}})$ より,
$\hat{T}^{\mathrm{fb}} = (6 \times 100)/(1+6 \times 100) = 600/601.$

$$\hat{y}^{\mathrm{fb}} = \hat{T}^{\mathrm{fb}} r = (600/601) \times 5 \approx 5 \text{ [m/s]}.$$

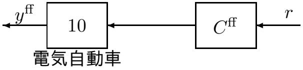


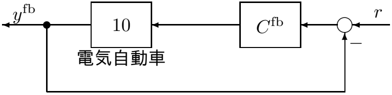
演習問題 10.2

7. 制御対象 P の相対的な変動率 ΔP, T^{ff} の相対的な変動率 ΔT^{ff} および T^{fb} の相対的な変動率 ΔT^{fb}

$$\Delta P = \frac{10-6}{6} \qquad \Delta T^{\mathrm{ff}} = \frac{T^{\mathrm{ff}} - \hat{T}^{\mathrm{ff}}}{\hat{T}^{\mathrm{ff}}} \qquad \Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{T^{\mathrm{fb}} - \hat{T}^{\mathrm{fb}}}{\hat{T}^{\mathrm{fb}}}$$

を考える.
1. ΔP と ΔT^{ff} の関係を論ぜよ.
2. ΔP と ΔT^{fb} の関係を論ぜよ.





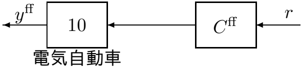
演習問題 10.2

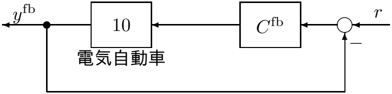
$$\Delta P = \frac{10-6}{6} \qquad \Delta T^{\mathrm{ff}} = \frac{T^{\mathrm{ff}} - \hat{T}^{\mathrm{ff}}}{\hat{T}^{\mathrm{ff}}}$$

1. ΔP と ΔT^{ff} の関係を論ぜよ.

$$\Delta T^{\mathrm{ff}} = \frac{T^{\mathrm{ff}} - \hat{T}^{\mathrm{ff}}}{\hat{T}^{\mathrm{ff}}} = \frac{PC^{\mathrm{ff}} - \hat{P}C^{\mathrm{ff}}}{\hat{P}C^{\mathrm{ff}}} = \frac{P - \hat{P}}{\hat{P}} = \Delta P$$

なので, 制御対象 P の相対的な変動率 ΔP が, そのまま T^{ff} の相対的な変動率 ΔT^{ff} となって現れる.





演習問題 10.2

$$\Delta P = \frac{10-6}{6} \qquad \Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{T^{\mathrm{fb}} - \hat{T}^{\mathrm{fb}}}{\hat{T}^{\mathrm{fb}}}$$

2. ΔP と ΔT^{fb} の関係を論ぜよ.

$$\Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{\dfrac{PC^{\mathrm{fb}}}{1+PC^{\mathrm{fb}}} - \dfrac{\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}{1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}}{\dfrac{\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}{1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}} = \frac{\dfrac{PC^{\mathrm{fb}}}{1+PC^{\mathrm{fb}}}(1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}) - \hat{P}C^{\mathrm{fb}}}{\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}$$

$$= \frac{PC^{\mathrm{fb}}(1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}) - (1+PC^{\mathrm{fb}})\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}{(1+PC^{\mathrm{fb}})\hat{P}C^{\mathrm{fb}}}$$

$$= \frac{P(1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}) - (1+PC^{\mathrm{fb}})\hat{P}}{(1+PC^{\mathrm{fb}})\hat{P}}$$

$$= \frac{1}{1+PC^{\mathrm{fb}}} \frac{P(1+\hat{P}C^{\mathrm{fb}}) - (1+PC^{\mathrm{fb}})\hat{P}}{\hat{P}}$$

$$= \frac{1}{1+PC^{\mathrm{fb}}} \frac{P-\hat{P}}{\hat{P}} = S\Delta P$$

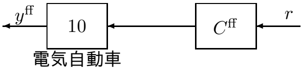
演習問題 10.2

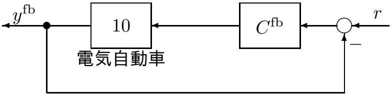
$$\Delta P = \frac{10-6}{6} \qquad \Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{T^{\mathrm{fb}} - \hat{T}^{\mathrm{fb}}}{\hat{T}^{\mathrm{fb}}}$$

2. ΔP と ΔT^{fb} の関係を論ぜよ．

$$\Delta T^{\mathrm{fb}} = \frac{1}{1+PC^{\mathrm{fb}}}\frac{P-\hat{P}}{\hat{P}} = S\Delta P$$

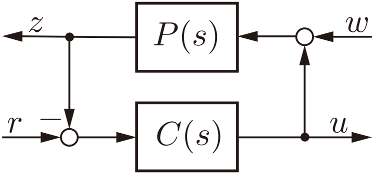
なので，制御対象 P の相対的な変動率 ΔP が，S 倍されて T^{fb} の相対的な変動率 ΔT^{fb} となって現れる．したがって，感度関数 S の小さなフィードバック制御系では，制御対象の変動の影響が出力に現れにくい．





ちょっと復習

有界入力有界出力安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, 四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負であることである

有界入力有界出力安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

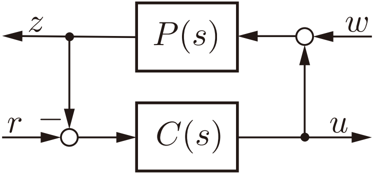
$$\Leftrightarrow$$

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

$$\Leftrightarrow$$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

漸近安定性



$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \qquad t \geq t_0
$$

漸近安定性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \qquad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)
任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定 理 (フィードバック制御系の漸近安定性)
フィードバック制御系が漸近安定となる必要十分条件は,
行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部
が負となることである

ここまで復習

演習問題 11.1

特性多項式 $\phi(s)$ が以下で与えられるフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を判定しなさい.

1. $\phi(s) = s^2 + 2s$
2. $\phi(s) = s^2 + 2s + 1$
3. $\phi(s) = s^2 + 1$
4. $\phi(s) = s^2 - s + 1$
5. $\phi(s) = 25(s-1) + (s+10)(s-1)s$

演習問題 11.1

1. $\phi(s) = s^2 + 2s$
   $\phi(s) = s^2 + 2s = s(s+2) = 0$ より, 閉ループ極は $p_1 = 0 \not< 0$, $p_2 = -2$. よって不安定.
2. $\phi(s) = s^2 + 2s + 1$
   $\phi(s) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$ より, 閉ループ極は $p_1 = p_2 = -1$. よって安定.
3. $\phi(s) = s^2 + 1$
   $\phi(s) = s^2 + 1 = 0$ より, 閉ループ極は $p_{1,2} = \pm j$.
   $\mathrm{Re}[\, p_1 \,] = \mathrm{Re}[\, p_2 \,] = 0 \not< 0$ より不安定.
4. $\phi(s) = s^2 - s + 1$
   $\phi(s) = s^2 - s + 1 = 0$ より, 閉ループ極は $p_{1,2} = (1/2) \pm j(\sqrt{3}/2)$.
   $\mathrm{Re}[\, p_1 \,] = \mathrm{Re}[\, p_2 \,] = 1/2 \not< 0$ より不安定.
5. $\phi(s) = 25(s-1) + (s+10)(s-1)s$
   $\phi(s) = 25(s-1) + (s+10)(s-1)s = (s-1)(25 + s^2 + 10s) = (s-1)(s+5)^2 = 0$ より, 閉ループ極は $p_1 = 1 \not< 0$, $p_2 = p_3 = -5$.
   よって不安定.

演習問題 11.2

フィードバック制御系 Fig. 11.3 を考える．制御対象 $P(s)$, コントローラ $C(s)$ が以下で与えられる場合の有界入力有界出力安定性を判定しなさい．

1. $P(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad C(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$
2. $P(s) = \dfrac{1}{s^2-4} \quad C(s) = \dfrac{s-2}{s+1}$
3. $P(s) = \dfrac{1}{s+2} \quad C(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$
4. $P(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad C(s) = \dfrac{1}{5s-1}$
5. $P(s) = \dfrac{s-2}{s(s+3)} \quad C(s) = \dfrac{3s+1}{s(s-2)}$

演習問題 11.2

1. $P(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad C(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$
   $\phi(s) = (s-1)(s+1) + 1(s-1) = (s-1)(s+1+1) = (s-1)(s+2) = 0$ より，閉ループ極は $p_1 = 1 \not< 0$, $p_2 = -2$. よって不安定.
2. $P(s) = \dfrac{1}{s^2-4} \quad C(s) = \dfrac{s-2}{s+1}$
   $\phi(s) = (s^2-4)(s+1) + 1(s-2) =$ $(s-2)(s+2)(s+1) + (s-2) = (s-2)((s+2)(s+1)+1) = 0$ より，閉ループ極に $p_1 = 2 \not< 0$ が含まれるので不安定.
3. $P(s) = \dfrac{1}{s+2} \quad C(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$
   $\phi(s) = (s+2)(s-1) + 1(s+1) = s^2 + s - 2 + s + 1 = s^2 + 2s - 1 = 0$ より，閉ループ極は $p_1 = -1 + \sqrt{2} \not< 0$, $p_2 = -1 - \sqrt{2}$. よって不安定.

演習問題 11.2

4. $P(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad C(s) = \dfrac{1}{5s-1}$
   $\phi(s) = (s-1)(5s-1)+1\times 1 = 5s^2-s-5s+1+1 = 5s^2-6s+2 = 0$
   より，閉ループ極は $p_{1,2} = 3/5 \pm j1/6$.
   $\mathrm{Re}[\,p_1\,] = \mathrm{Re}[\,p_2\,] = 3/5 \not< 0$ より不安定.
5. $P(s) = \dfrac{s-2}{s(s+3)} \quad C(s) = \dfrac{3s+1}{s(s-2)}$
   $\phi(s) = s(s+3)s(s-2)+(s-2)(3s+1) =$
   $(s-2)(s^2(s+3)+(3s+1)) = 0$ より，閉ループ極に $p_1 = 2 \not< 0$ が含まれるので不安定.

演習問題 11.3

フィードバック制御系 Fig. 11.3 を考える．制御対象 $P(s)$，コントローラ $C(s)$ が以下で与えられる時，フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる k の範囲を求めなさい．

$$P(s) = \frac{2}{s-1} \quad C(s) = \frac{k}{s+2}$$

演習問題 11.3

$$P(s) = \frac{2}{s-1} \quad C(s) = \frac{k}{s+2}$$

特性多項式は $\phi(s) = (s-1)(s+2) + 2k = s^2 + s - 2 + 2k$.
$\phi(s) = 0$ より, 閉ループ極は $p_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9-8k}}{2}$.

1. p_1, p_2 が複素共役, つまり $9 - 8k < 0$ の時, $\mathrm{Re}[\,p_1\,] = \mathrm{Re}[\,p_2\,] = -1/2$ より安定. したがって $k > 9/8$ の場合は安定.
2. p_1, p_2 が実数根, つまり $9 - 8k \geq 0$ より $k \leq 9/8$ の場合は, $-1 + \sqrt{9-8k} < 0$ より, $k > 1$ がえられる. したがって $9/8 \geq k > 1$ の場合は安定.

1, 2 より, フィードバック制御系が安定となる k の範囲は, $k > 1$.

演習問題 11.4

フィードバック制御系 Fig. 11.1 を考える．制御対象 P, コントローラ C が以下の状態空間実現で与えられる場合の漸近安定性を判定しなさい．

1. $$\dot{x}_p(t) = x_p(t) + u(t) \qquad \dot{x}_c(t) = -x_c(t) + \sqrt{2}e(t)$$
   $$z(t) = x_p(t) \qquad u(t) = -\sqrt{2}x_c(t) + e(t)$$
2. $$\dot{x}_p(t) = -2x_p(t) + u(t) \qquad \dot{x}_c(t) = -x_c(t) + \sqrt{2}e(t)$$
   $$z(t) = x_p(t) \qquad u(t) = \sqrt{2}x_c(t) + e(t)$$
3. $$\dot{x}_p(t) = x_p(t) + u(t) \qquad \dot{x}_c(t) = 0.2x_c(t) + 0.5e(t)$$
   $$z(t) = x_p(t) \qquad u(t) = 0.4x_c(t)$$

演習問題 11.4

フィードバック制御系 Fig. 11.1 を考える．制御対象 P, コントローラ C が以下の状態空間実現で与えられる場合の漸近安定性を判定しなさい．

行列 $A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ とその固有値を求める．

演習問題 11.4

行列 $A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ とその固有値を求める.

1. $$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= x_p(t) + u(t) \\ z(t) &= x_p(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= -x_c(t) + \sqrt{2}e(t) \\ u(t) &= -\sqrt{2}x_c(t) + e(t) \end{aligned}$$

$$A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \times 1 \times 1 & 1 \times (-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2} \times 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_{\mathrm{cl}}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

よって固有値は $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 \not< 0$ より不安定.

演習問題 11.4

行列 $A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ とその固有値を求める.

2.
$$\dot{x}_p(t) = -2x_p(t) + u(t) \qquad \dot{x}_c(t) = -x_c(t) + \sqrt{2}e(t)$$
$$z(t) = x_p(t) \qquad u(t) = \sqrt{2}x_c(t) + e(t)$$

$$A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} -2 - 1 \times 1 \times 1 & 1 \times \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \times 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_{\mathrm{cl}}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

よって固有値は $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$. $\mathrm{Re}[\,\lambda_1\,] = \mathrm{Re}[\,\lambda_2\,] = -2$ より安定.

演習問題 11.4

行列 $A_{\rm cl} = \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix}$ とその固有値を求める.

3.
$$\dot{x}_p(t) = x_p(t) + u(t) \qquad \dot{x}_c(t) = 0.2x_c(t) + 0.5e(t)$$
$$z(t) = x_p(t) \qquad u(t) = 0.4x_c(t)$$

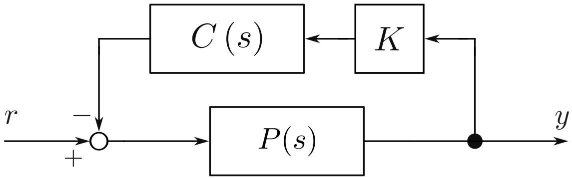
$$A_{\rm cl} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \times 0 \times 1 & 1 \times 0.4 \\ -0.5 \times 1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_{\rm cl}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -0.4 \\ 0.5 & \lambda - 0.2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.2) + 0.2 \\ &= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.4 \end{aligned}$$

よって固有値は $\lambda_{1,2} = 3/5j \pm (1/5)$. $\mathrm{Re}[\,\lambda_1\,] = \mathrm{Re}[\,\lambda_2\,] = 3/5 \not< 0$ より不安定.

演習問題 11.6

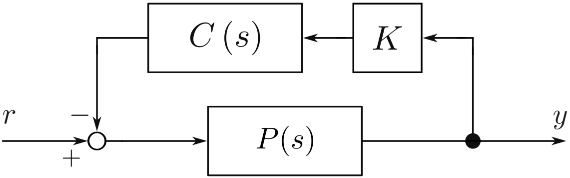
Fig. 11.7 の制御系を考える.



$$P(s) = \frac{1}{2s-1}, \qquad C(s) = \frac{10}{3s+5}, \qquad K = k\,(= \text{const.})$$

1. $P(s)$ の安定性を判別しなさい.
2. $C(s)$ の安定性を判別しなさい.
3. r から y までの伝達関数 $G_{yr}(s)$ を求めなさい.
4. 伝達関数 $G_{yr}(s)$ が安定となる k の範囲を求めなさい.

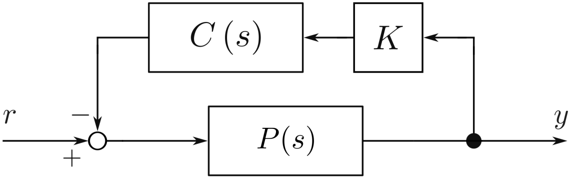
演習問題 11.6



$$P(s) = \frac{1}{2s-1}, \qquad C(s) = \frac{10}{3s+5}, \qquad K = k\,(= \text{const.})$$

1. $P(s)$ の安定性を判別しなさい.
   $2s - 1 = 0$ より, 極は $p_1 = 1/2 \not< 0$. よって不安定.
2. $C(s)$ の安定性を判別しなさい.
   $3s + 5 = 0$ より, 極は $p_1 = -5/3$. よって安定.

演習問題 11.6



$$P\left(s\right) = \frac{1}{2s-1}\,, \qquad C\left(s\right) = \frac{10}{3s+5}\,, \qquad K = k\,(= \text{const.})$$

3. r から y までの伝達関数 $G_{yr}\left(s\right)$ を求めなさい．
   $y = P(r - kCy)$ より，$y = P/(1 + kPC)$．よって

$$G_{yr}(s) = \frac{\dfrac{1}{2s-1}}{1 + k\dfrac{1}{2s-1}\dfrac{10}{3s+5}} = \frac{3s+5}{(2s-1)(3s+5)+10k}$$

$$= \frac{3s+5}{6s^2+7s-5+10k}$$

演習問題 11.6

$$G_{yr}(s) = \frac{3s+5}{6s^2+7s-5+10k}$$

4. 伝達関数 $G_{yr}(s)$ が安定となる k の範囲を求めなさい.
   $6s^2+7s+5(2k-1)=0$ より, 極は

$$p_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-120(2k-1)}}{12}$$

   1. p_1, p_2 が複素共役, つまり $49-120(2k-1)<0$ の時,
      $\mathrm{Re}[\,p_1\,] = \mathrm{Re}[\,p_2\,] = -7/12$ より安定. したがって
      $\sqrt{49-120(2k-1)}<0$ より, $k > 169/240 \approx 0.70$ の場合は安定.
   2. p_1, p_2 が実数根, つまり $49-120(2k-1) \geq 0$ より
      $k \leq 169/240 \approx 0.70$ の場合は, $-7+\sqrt{49-120(2k-1)}<0$ より,
      $k > 1/2$ がえられる. したがって $169/240 \geq k > 1/2$ の場合は安定.

   1, 2 より, 伝達関数 $G_{yr}(s)$ が安定となる k の範囲は, $k > 1/2$.