

---

---

## 第II部

# フィードバック制御系の設計

---



# 第10章 フィードバック vs フィードフォワード

はじめに

## 第10章のポイント

- フィードフォワード制御系とフィードバック制御系.
- フィードバック構造の効用: 制御対象の特性変動の影響を抑制できる.
- フィードバック構造の効用: 予期しない入力 (外乱) の影響を抑制できる.
- 感度関数, 相補感度関数を理解しよう.

## 10.1 フィードフォワード制御系とフィードバック制御系

本稿の第 I 部 動的なシステムの解析 では, 一般的な動的システムを記号  $G$  であらわし (Fig. 10.1 参照), その伝達関数による表現 (2.4) や状態空間表現 (2.3) を考えた. 本章以降の第 II 部 フィードバック制御系の設計では, 制御対象を望みどおりに制御するためのコントローラの設計を考える. そこで制御対象をあらわす動的なシステムは記号  $P$  で, コントローラをあらわす動的なシステムは記号  $C$  であらわすことにする (Fig. 10.2 参照).

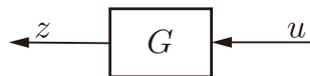


Fig. 10.1: 一般的な動的システム



Fig. 10.2: 制御対象とコントローラ

制御対象  $P$  を望みどおりに制御するためには, コントローラ  $C$  が制御対象に影響を与えられるように, 制御対象  $P$  とコントローラ  $C$  を上手く接続

してあげなければならない. そこで制御系設計では, 代表的な制御系の構成として, Fig. 10.3(a) に示すフィードフォワード制御系や Fig. 10.3(b) に示すフィードバック制御系を考える.

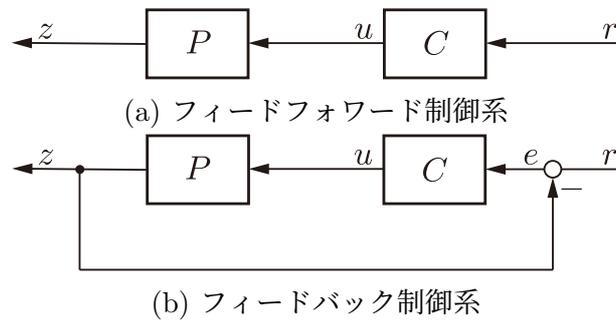


Fig. 10.3: 制御系の構成

Fig. 10.3 で, それぞれの信号は

- $z$  被制御量 あるいは 出力
- $u$  制御量 あるいは (制御) 入力
- $r$  参照入力 あるいは 目標値
- $e$  偏差

などのように呼ばれるのが一般的である. もちろん Fig. 10.3(a) のフィードフォワード制御系では, 偏差  $e$  は考えていない. 例えば簡単な例として, 制御対象  $P$  として自動車を考えてみよう. この自動車を 50 km/h の速さで走らせるのが制御目的であったとする. このとき制御技術者は, 目標値  $r(t) = 50$  を想定し, 出力  $z$  が  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 50 = r(t)$  となるような適切な入力  $u(t)$  を自動的に生成してくれるコントローラ  $C$  の設計を考えることになる.

簡単な例題を考え, フィードフォワード制御系とフィードバック制御系の設計例を考えることから始めよう.

1 A の入力電流毎に 10 km/h の速度がでる電車の速度制御を考える. つまり制御対象の特性は  $z = Pu = 10u$  で与えられる (Fig. 10.4 参照).



Fig. 10.4: 電車の特性

この電車の制御系として Fig. 10.5(a) のフィードフォワード制御系と Fig. 10.5(b) のフィードバック制御系を考えよう. なお Fig. 10.5 では, フィードフォワードコントローラを  $C_{ff}$  でフィードバックコントローラを  $C_{fb}$  であらわしている.

はじめにフィードフォワード制御系 (Fig. 10.5(a)) を考えよう. 目標値  $r$  から出力  $z$  までの特性は

$$z = PC_{ff}r$$

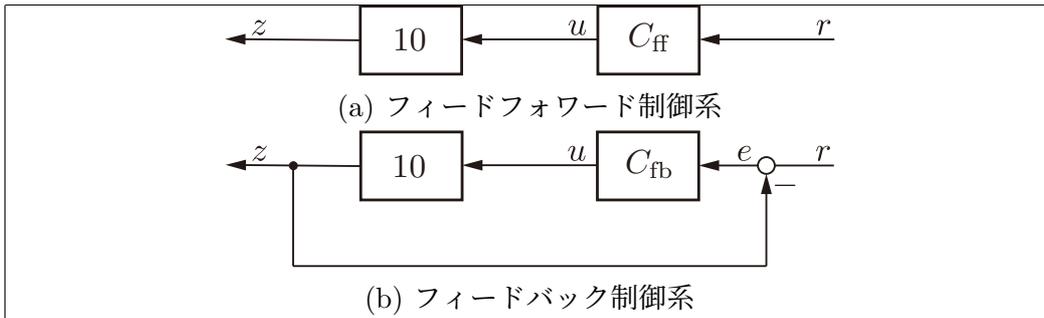


Fig. 10.5: 電車の速度制御

で与えられる。制御対象の特性が  $P = 10$  であるとき、適切なフィードフォワードコントローラ  $C_{ff}$  をどのように選択すればよいだろうか？当然  $C_{ff} = 1/10 = 1/P$  とするのが最も良いと考えられる。このとき  $z = PC_{ff}r = 10 \times (1/10) \times r = r$  であるから、任意の目標値  $r$  に対して出力  $z$  を完全に一致させることができる。例えば  $r(t) = 100 \text{ km/h}$  に対して  $z(t) = 100 \text{ km/h}$  が実現できる。

つぎにフィードバック制御系 (Fig. 10.5(b)) を考えよう。はじめに目標値  $r$  から出力  $z$  までの特性を求めてみる。フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 10.5(b) から

$$z = Pu = PC_{fb}e = PC_{fb}(r - z)$$

であるので、これを变形し

$$\begin{aligned} z + PC_{fb}z &= PC_{fb}r \\ (1 + PC_{fb})z &= PC_{fb}r \\ z &= \frac{PC_{fb}}{1 + PC_{fb}}r \end{aligned}$$

がえられる。  $P = 10$  であるので

$$z = \frac{10C_{fb}}{1 + 10C_{fb}}r$$

となる。ここで、例えば、  $C_{fb} = 5$  と選ぶことにすると

$$z = \frac{10C_{fb}}{1 + 10C_{fb}}r = \frac{50}{1 + 50}r = \frac{50}{51}r$$

である。このとき目標値  $r(t) = 100 \text{ km/h}$  に対して出力  $z(t) = (50/51) \times 100 = 98.0 \text{ km/h}$  であり、ほぼ  $z(t) = 98.0 \approx 100 = r(t)$  を実現できる<sup>1</sup>。

簡単な特性の制御対象 (Fig. 10.4) を想定し、フィードフォワード制御系 (Fig. 10.5(a)) でも、フィードバック制御系 (Fig. 10.5(b)) でも、出力  $z$  を目標値  $r$  に一致させることができそうなことが確認できた。しかしながら実は、フィードバック制御系には、フィードフォワード制御系では実現できない優れた特性がある。10.2, 10.3 節では、このフィードバック構造の効用を確認する。

<sup>1</sup> $C_{fb} = 10$  と選べば  $z(t) = 99.0 \text{ km/h}$  とできるし、 $C_{fb} = 100$  と選べば  $z(t) = 99.9 \text{ km/h}$  とできる。目標値  $r$  から出力  $z$  までの特性は  $10C_{fb}/(1 + 10C_{fb})$  なので、 $C_{fb}$  がどんどん大きくなると、 $10C_{fb}/(1 + 10C_{fb})$  はどんどん 1 に近づく。

**例題 10.1.** 制御対象  $P$  の特性が一次の伝達関数  $P(s) = K/(Ts+1)$ ,  $K = 0.5$ ,  $T = 1$  で与えられるとする. フィードバック制御系 Fig. 10.3(b) の設計を考えよう.

はじめに参考に, 制御対象  $P(s)$  にステップ入力 Fig. 10.7(b) を加えたときのステップ応答 (Fig. 10.6 参照) を Fig. 10.7(a) に示しておく.

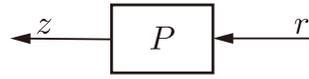


Fig. 10.6: 制御対象  $P$  のステップ応答

フィードバック制御系 (Fig. 10.3(b)) を構成するコントローラとして, ここでは  $C(s) = 1/s$  の積分器を考えよう<sup>2</sup>. ステップ入力 (Fig. 10.7(b)) を加えたときのフィードバック制御系の出力  $z$  を Fig. 10.8(a) に, このときのコントローラからの出力 (制御入力)  $u$  を Fig. 10.8(b) に示す. フィードバック制御を施したことにより, Fig. 10.8(a) の出力  $z$  は  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  を達成することができている,

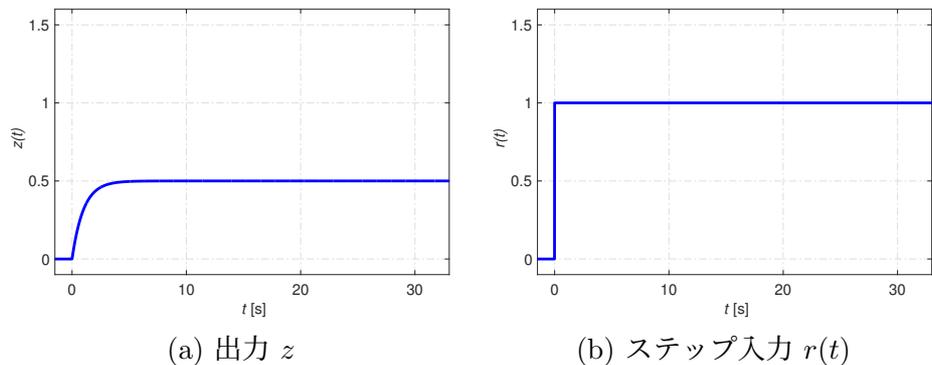


Fig. 10.7: 制御対象  $P$  のステップ応答

Fig. 10.8(a) に示す応答から  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  がわかるが, これは解析的にも簡単に確認できる.  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  を確認しても  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - z(t)) = 0$  を確認してもどちらでも同じなので, ここでは  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  を確認しよう.

フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 10.3(b) より

$$e(s) = r(s) - z(s) = r(s) - P(s)u(s) = r(s) - P(s)C(s)e(s)$$

である. これを変形して

$$e(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} r(s)$$

となる.  $P(s) = K/(Ts+1)$ ,  $C(s) = 1/s$  なので

$$e(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} r(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s}} r(s) = \frac{(Ts+1)s}{(Ts+1)s + K} r(s)$$

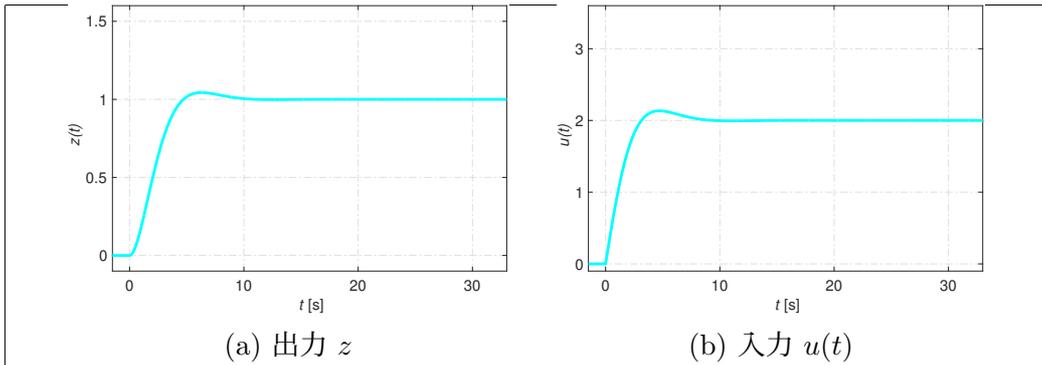


Fig. 10.8: フィードバック制御系のステップ応答

がわかる。

ここで  $r(s) = 1/s$  とラプラス変換の最終値の定理  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s)$  を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} se(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(Ts+1)s}{(Ts+1)s+K} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(Ts+1)s}{(Ts+1)s+K} = \frac{0}{K} = 0 \quad (10.1) \end{aligned}$$

より,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  が確認できる。 □

## 10.2 フィードバック構造の効用 1

10.1 節の電車の速度制御の問題を引き続き考えよう。ただしここでは、電車が出発し、つぎの駅で沢山のお客が乗ったところ、1 A の入力電流毎に 8 km/h の速度しかでなくなった状況を想定する。つまり制御対象 (電車) の特性は  $P = 10$  から  $\hat{P} = 8$  に変動してしまっている。このとき  $C_{ff} = 1/10$  としていたフィードフォワード制御系 (Fig. 10.5(a)) の出力  $z$  は

$$z = \hat{P}u = \hat{P}C_{ff}r = 8 \times \frac{1}{10} \times r$$

で与えられる。例えば  $r(t) = 100$  km/h に対して  $z(t) = 80$  km/h と 20 km/h の誤差が生じる。制御対象の特性変動  $P = 10$  から  $\hat{P} = 8$  の割合が、そのまま出力の誤差として現れてしまう。

それでは  $C_{fb} = 5$  としていたフィードバック制御系の場合はどうであろうか。

$$z = \frac{\hat{P}C_{fb}}{1 + \hat{P}C_{fb}} r = \frac{8C_{fb}}{1 + 8C_{fb}} r = \frac{8 \times 5}{1 + 8 \times 5} r = \frac{40}{41} r$$

なので,  $r(t) = 100$  km/h に対して  $z(t) = 97.6$  km/h となり, 変動前の  $z(t) = 98.0$  km/h に対してわずか 0.4 km/h の出力変動で済んでいる。

<sup>2</sup>なぜここでコントローラとして積分器  $1/s$  を選択したのか, という具体的な設計法については, あとの 14 章などで考えます。

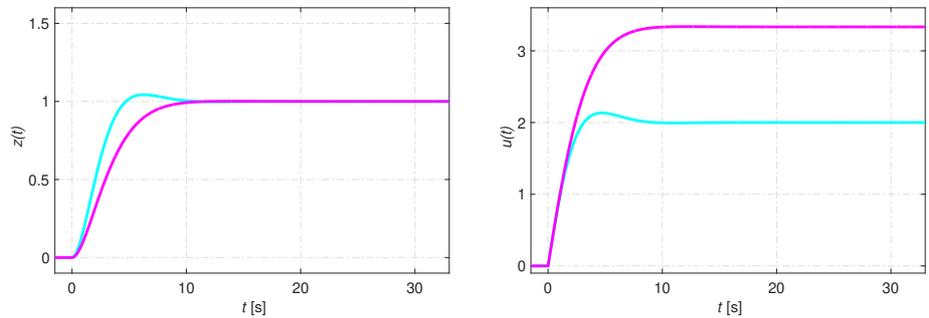
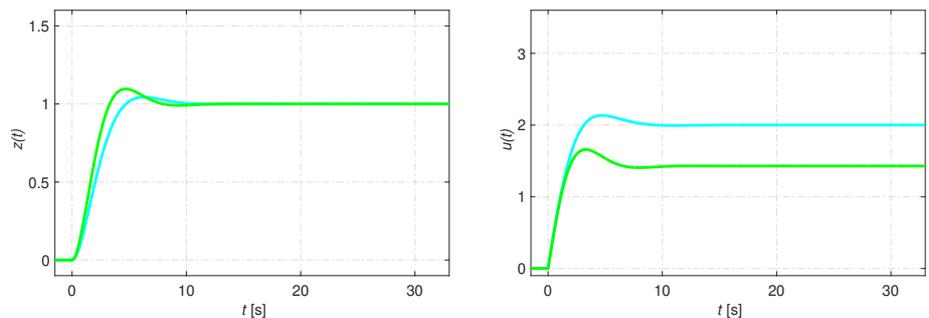
ここでは、電車にお客が乗るという状況を想定し、制御対象  $P$  の特性変動を考えた。????? 特性変動は、必ず存在する。経年変化、パラメータの誤差、簡素なモデリングによる誤差。?????

制御対象  $P$  に特性の変動があったとしても、その影響が出力  $z$  には現れにくいようにする (制御対象  $P$  の特性変動の影響を抑制できる) 性質は、実用的な制御系に要求される重要な性質である。

- フィードバック構造の効用: 制御対象  $P$  の特性変動の影響を抑制することができる。

**例題 10.2.** 例題 10.1 で考えたフィードバック制御系を再度考え、制御対象の特性変動が与える影響を確認しよう。

はじめに制御対象の特性をあらわすパラメータ  $K = 0.5$  が、それぞれ  $K = 0.3, 0.7$  に変動した場合の応答を Figs. 10.9, 10.10 に示す。

(a) 出力  $z$ (b) 入力  $u(t)$ Fig. 10.9: 特性変動後のステップ応答,  $K = 0.3$ (a) 出力  $z$ (b) 入力  $u(t)$ Fig. 10.10: 特性変動後のステップ応答,  $K = 0.7$ 

同様にパラメータ  $T = 1$  が、それぞれ  $T = 0.6, 1.4$  に変動した場合の応答を Figs. 10.11, 10.12 に示す。

Figs. 10.9(a), 10.10(a), 10.11(a), 10.12(a) に示すいずれの出力  $z$  も  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  を達成しており、制御対象の特性変動の影響を抑制できている。また Figs. 10.9(b), 10.10(b), 10.11(b), 10.12(b) に示す制御入力  $u$  の応答からは、フィードバックコントローラ  $C(s)$  が、制御対象の特性変動に応じて適切な制御入力  $u$  を生成していることが確認できる。

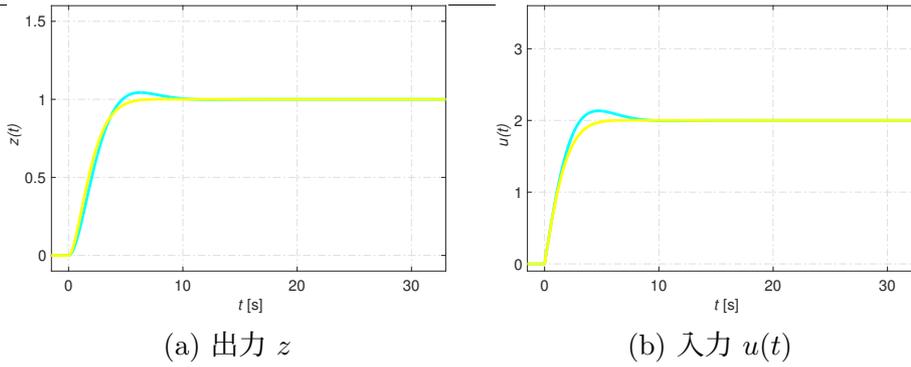


Fig. 10.11: 特性変動後のステップ応答,  $T = 0.6$

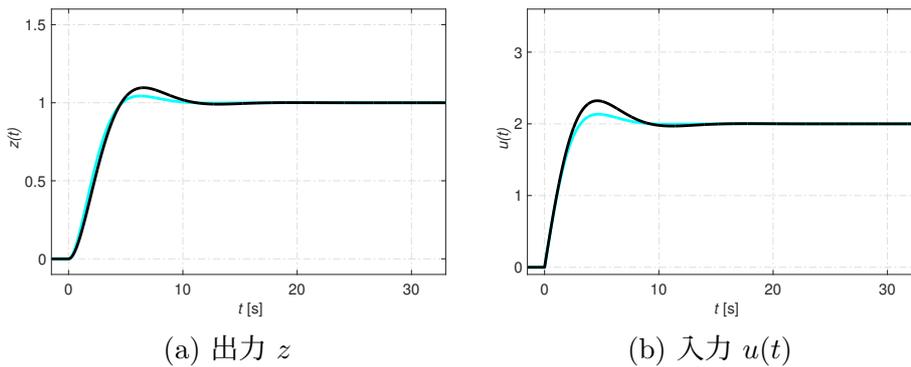


Fig. 10.12: 特性変動後のステップ応答,  $T = 1.4$

なお (10.1) から、任意の  $K, T$  に対して  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  であるから、パラメータ  $K, T$  に変動があっても  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  であることが確認できる。 □

### 10.3 フィードバック構造の効用 2

10.1, 10.2 節で考えた電車の速度制御の問題をもう一度とりあげる。ここでは、制御系に加わる予期せぬ入力 (外乱) の影響を考えたい。そこで向かい風  $w$  [km/h] が電車の速度に直接的に影響を与え、出力が  $z = Pu + w$  で与えられる状況を想定しよう。このとき、Fig. 10.13(a) のフィードフォワード制御系と Fig. 10.13(b) のフィードバック制御系を考える。

フィードフォワード制御系 (Fig. 10.13(a)) の出力は

$$z = Pu + w = PC_{ff}r + w$$

で与えられる。  $P = 10, C_{ff} = 1/10 = 1/P, r(t) = 100$  km/h のとき、30 km/h の予期せぬ向かい風 (外乱)  $w = -30$  が吹いたとすると、出力は

$$z = PC_{ff}r + w = 10 \times \frac{1}{10} \times 100 - 30 = 70$$

となり 30 km/h の誤差を生じる。外乱  $w$  の影響が出力  $z$  にそのまま現れることは、 $z = PC_{ff}r + w$  から明らかである。

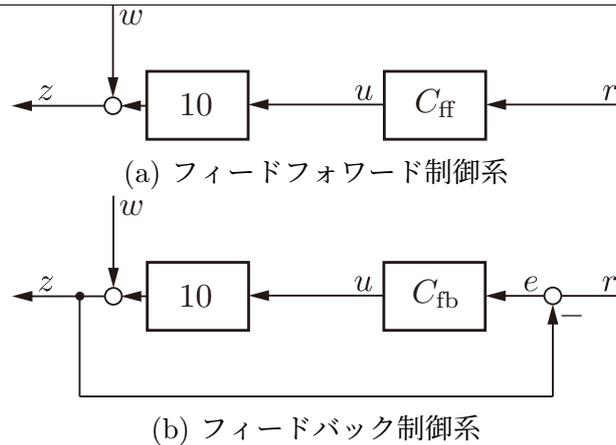


Fig. 10.13: 外乱が加わる場合の電車の速度制御

それではフィードバック制御系の場合はどうだろうか. フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 10.13(b) から

$$z = Pu + w = PC_{fb}e + w = PC_{fb}(r - z) + w$$

であるので, これを変形し

$$\begin{aligned} z + PC_{fb}z &= PC_{fb}r + w \\ (1 + PC_{fb})z &= PC_{fb}r + w \\ z &= \frac{PC_{fb}}{1 + PC_{fb}}r + \frac{1}{1 + PC_{fb}}w \end{aligned}$$

がえられる.  $P = 10$ ,  $C_{fb} = 5$ ,  $r(t) = 100 \text{ km/h}$  のとき,  $w = -30$  の外乱が加わったとすると, 出力は

$$\begin{aligned} z &= \frac{PC_{fb}}{1 + PC_{fb}}r + \frac{1}{1 + PC_{fb}}w \\ &= \frac{10 \times 5}{1 + 10 \times 5}r + \frac{1}{1 + 10 \times 5}w \\ &= \frac{50}{51}r + \frac{1}{51}w = \frac{50}{51}100 - \frac{1}{51}30 = 97.5 \end{aligned}$$

であり, 外乱  $w$  が加わらないときの出力  $z(t) = 98.0 \text{ km/h}$  に対する影響を  $(1/51) \times w = 0.6 \text{ km/h}$  以下に抑制することができる.

????? 外乱は加わる. ?????

制御系に加わる予期せぬ入力  $w$  の影響が出力  $z$  には現れにくいようにする (外乱の影響を抑制できる) 性質は, 実用的な制御系に要求される重要な性質である.

- フィードバック構造の効用: 外乱  $w$  の影響を抑制することができる.

**例題 10.3.** 例題 10.1 で考えたフィードバック制御系, ただし Fig. 10.14 のように外乱  $w$  が加わる場合を考え, 外乱が与える影響を確認しよう.

Fig. 10.15(c) のステップ入力  $r$  に加え, Fig. 10.15(d) の外乱  $w$  が加わったときの出力  $z$  を Fig. 10.15(a) に示す.

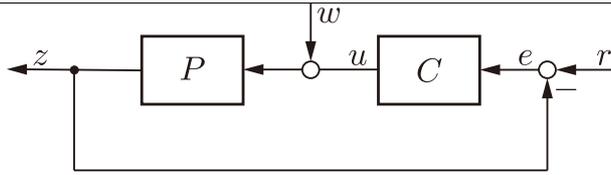


Fig. 10.14: 外乱が加わるフィードバック制御系

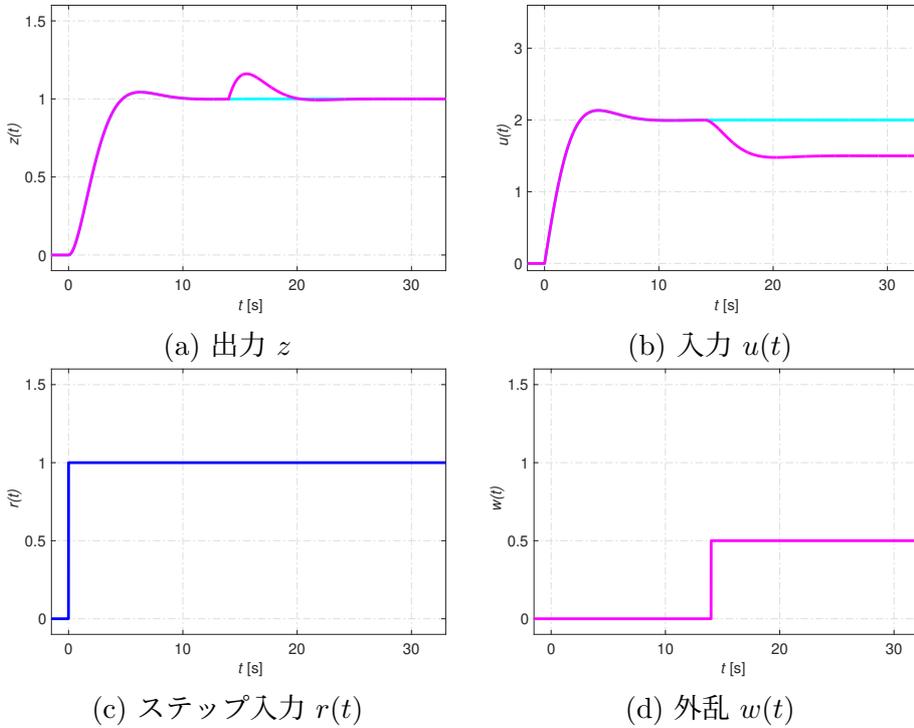


Fig. 10.15: 外乱が加わる場合の応答,

Figs. 10.15(a), 10.15(b) に示す出力  $z$ , 制御入力  $u$  の応答では, 外乱  $w$  の影響により  $z(t) \neq 1 = r(t)$  となった出力  $z$  が, 速やかに  $z(t) = 1$  に引き戻される様子, また外乱の影響を抑制するため適切な制御入力  $u$  が生成される様子が確認できる.

例題 10.1 での考察と同様に, Fig. 10.15(b) に示すようなステップ状の外乱  $w$  が加わる場合には,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  であることを簡単に確認できる. フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 10.14 より

$$z = P(u + w) = PC(r - z) + Pw$$

である. これを変形して

$$z = \frac{PC}{1 + PC} r + \frac{P}{1 + PC} w$$

となる.  $P(s) = K/(Ts + 1)$ ,  $C(s) = 1/s$  なので

$$\begin{aligned} z &= \frac{PC}{1+PC}r + \frac{P}{1+PC}w = \frac{\frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s}}{1 + \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s}}r + \frac{\frac{K}{Ts+1}}{1 + \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s}}w \\ &= \frac{K}{(Ts+1)s + K}r + \frac{Ks}{(Ts+1)s + K}w \end{aligned}$$

がわかる.

ここで  $r(s) = 1/s$  と外乱もステップ状であるから  $w(s) = 0.5/s$  として, ラプラス変換の最終値の定理  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sz(s)$  を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sz(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{K}{(Ts+1)s + K} \frac{1}{s} + \frac{Ks}{(Ts+1)s + K} \frac{0.5}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(Ts+1)s + K} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks}{(Ts+1)s + K} \cdot 0.5 = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

より,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  が確認できる. □

## 10.4 感度関数と相補感度関数

10.2 節では, フィードバック構造の効用として, 制御対象の特性変動の影響を抑制できる, を確認した. また 10.3 節では, 外乱の影響を抑制できる, を確認した. これらの効用は, フィードバック構造により得られるものであり, フィードフォワード制御では達成できない. このフィードバック構造がもつ効用は, 感度関数  $S$  により特徴づけられる.

はじめに 10.2 節と同様に, 制御対象の特性が  $P$  から  $\hat{P}$  に変動する場合を想定しよう. 適当なコントローラを設計, フィードバック制御系 Fig. 10.3(b) を構成したとする. さらに目標値  $r$  に対する出力が  $z$ , 制御対象の特性変動後の出力が  $\hat{z}$  だったとする. つまり

$$z = \frac{PC}{1+PC}r \quad \hat{z} = \frac{\hat{P}C}{1+\hat{P}C}r$$

を考える. このとき, 変動の割合を計る指標として  $\Delta z = (z - \hat{z})/\hat{z}$  を考える

ことにしよう.  $\Delta z$  は

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{z - \hat{z}}{\hat{z}} = \frac{\frac{PC}{1+PC}r - \frac{\hat{P}C}{1+\hat{P}C}r}{\frac{\hat{P}C}{1+\hat{P}C}r} = \frac{\frac{PC}{1+PC} - \frac{\hat{P}C}{1+\hat{P}C}}{\frac{\hat{P}C}{1+\hat{P}C}} \\ &= \frac{\frac{PC}{1+PC}(1+\hat{P}C) - \hat{P}C}{\hat{P}C} \\ &= \frac{PC(1+\hat{P}C) - (1+PC)\hat{P}C}{(1+PC)\hat{P}C} \\ &= \frac{P(1+\hat{P}C) - (1+PC)\hat{P}}{(1+PC)\hat{P}} = \frac{1}{1+PC} \frac{P(1+\hat{P}C) - (1+PC)\hat{P}}{\hat{P}} \\ &= \frac{1}{1+PC} \frac{P - \hat{P}}{\hat{P}} = S\Delta P\end{aligned}$$

と変形できる. したがって

$$\Delta z = S\Delta P \quad S = \frac{1}{1+PC} \quad \Delta P = \frac{P - \hat{P}}{\hat{P}} \quad (10.2)$$

とまとめることができる.

(10.2) からは, 制御対象の変動が大きく  $\Delta P$  が大きな場合でも, 関数  $S$  が小さければ, 出力の変動  $\Delta z$  が小さくて済むことがわかる. 関数  $S = 1/(1+PC)$  は感度関数と呼ばれる. つまり感度関数  $S$  の小さな制御系は, 制御対象の特性変動の影響を抑制できる優れた制御系ということになる. ここで, 感度関数  $S$  が“小さい”とはどのように捉えればよいのであろうか?<sup>3</sup> これについては, あとの 14 章などで再度考える.

なおここで, 感度関数  $S$  に加え, 関数  $T = 1 - S = 1 - (1/(1+PC)) = PC/(1+PC)$  を定義しておこう. 関数  $T$  は,  $S + T = 1$  をみたすことから, 相補感度関数と呼ばれる.

つぎに例題 10.3 と同様に, 外乱  $w$  が加わる場合 (Fig. 10.14) を考えよう. 例題 10.3 ですでに確認したように, 出力  $z$  は

$$z = \frac{PC}{1+PC}r + \frac{P}{1+PC}w$$

与えられる. 感度関数  $S$ , 相補感度関数  $T$  を使ってあらわせば

$$z = Tr + PSw$$

である. したがって制御対象  $P$  の特性変動の影響の抑制と同様に, 感度関数  $S$  が小さければ, 外乱  $w$  の影響が出力にあらわれにくい. また制御目標としては,  $z \approx r$  を考えるので,  $T \approx 1$  が望ましいこともわかる. 感度関数  $S$  が“小さい”と同様に, 相補感度関数  $T$  が 1 に“近い”については, あとの 14 章などで再度考える.

<sup>3</sup>数を考えるとき, 7 が 10 より小さいということは明らかだと思います. 複素数  $s = \sigma + j\omega$  の関数  $S(s) = 1/(1 + P(s)C(s))$  を考えるとき,  $S(s)$  が小さいとはどう考えれば良いのでしょうか, という意味です.

**例題 10.4.** 例題 10.1 で考えたフィードバック制御系の感度関数  $S(s)$  と相補感度関数  $T(s)$  を考えよう。

例題 10.1, 10.3 ですでに求めたように

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{(Ts + 1)s}{(Ts + 1)s + K}$$

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{K}{(Ts + 1)s + K}$$

となっている。  $K = 1, T = 1$  のときの  $S(j\omega), T(j\omega)$  のボード線図を、それぞれ Figs. 10.16, 10.17 に示す。

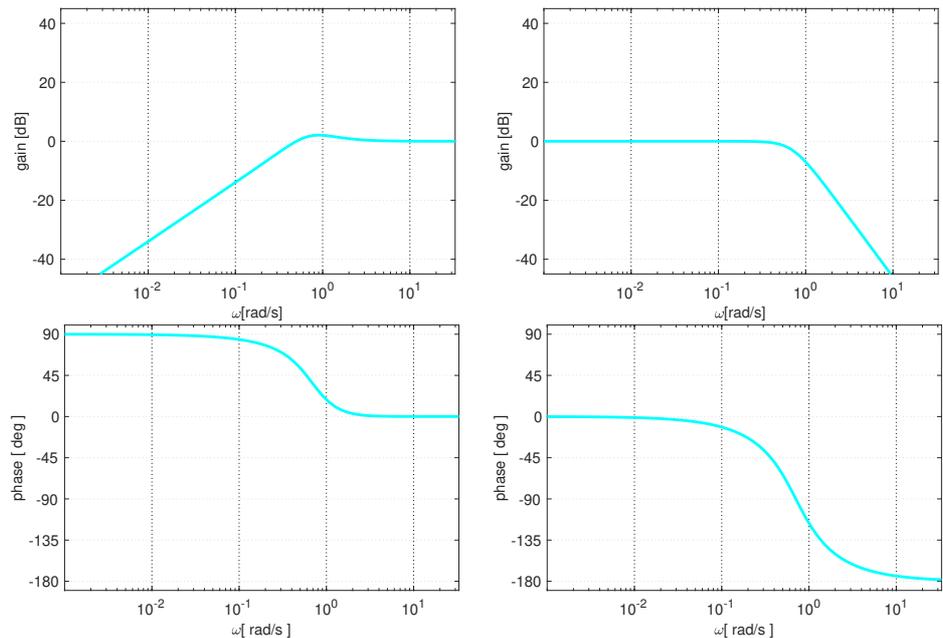


Fig. 10.16: 感度関数  $S(j\omega)$  のボード線図      Fig. 10.17: 相補感度関数  $T(j\omega)$  のボード線図

Figs. 10.16, 10.17 より、感度関数、相補感度関数それぞれのゲイン  $|S(j\omega)|, |T(j\omega)|$  を考えると、低周波数域  $\omega \ll 1$  では、 $|S(j\omega)| \approx 0$  および  $|T(j\omega)| \approx 1$  となっていることが確認できる。 □

**matlab note 10.1** (feedback). コマンド `sys = feedback( sys01, sys02 )` により、Fig. 10.18 のフィードバック制御系のシステム `sys` が計算できる。

Fig. 10.18: `sys = feedback( sys01, sys02 )`

相補感度関数  $T$  は、Fig. 10.3(b) のフィードバック制御系の  $r$  から  $z$  までの伝達関数になっているので、`sys01 = L = PC`, `sys02 = 1` とすることにより、コマンド `feedback( sys01, sys02 )` で計算できる。また感度関数  $S$  は  $S = 1 - T$  である。例題 10.4 のボード線図 Figs. 10.16, 10.17 は

1: `K = 0.5; T = 1;`

```

2: sys_p = tf( [ K ], [ T 1 ] )
3: sys_c = tf( [ 1 ], [ 1 0 ] )
4: sys_l = sys_p * sys_c
5: sys_t = feedback( sys_l, 1 )
6: sys_s = 1 - sys_t
7: bode( sys_s, sys_t )

```

のように確認できる。 □

## 10.5 フィードバック制御の難しさ

10.2 節では、フィードバック構造の効用として、制御対象の特性変動の影響を抑制できる、を確認した。また 10.3 節では、外乱の影響を抑制できる、を確認した。これらの効用は、フィードバック構造により得られるものであり、フィードフォワード制御では達成できない。実はフィードバック制御にはもう一つ大きな利点があり、それは不安定な制御対象を安定化できる、である。10.5.1 節では、この不安定な制御対象の安定化を簡単な例で確認してみよう。ただしフィードバックコントローラ的设计には難しさがある、それは、あえてフィードバック制御を施したことによる不安定化である。10.5.2 節では、制御技術者がきちんと把握しておくべき事実として、このフィードバックによる不安定化を確認しよう。

### 10.5.1 不安定な制御対象の安定化

制御対象の特性が

$$P(s) = \frac{10}{(s-1)(s+10)}$$

で与えられる場合を考える。制御対象の極は  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = -10$  であり、不安定な極  $p_1 = 1 > 0$  が存在する。この不安定な制御対象をフィードフォワード制御 (Fig. 10.19(a) 参照) あるいはフィードバック制御 (Fig. 10.19(b) 参照) で安定化することを考えよう。

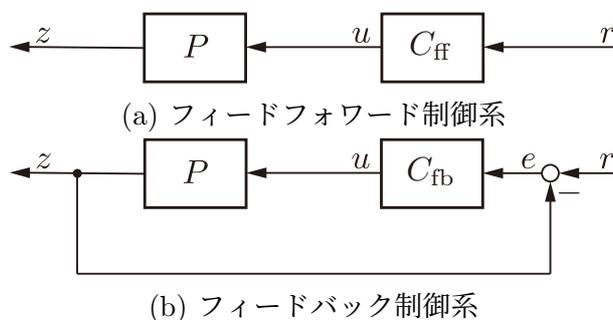


Fig. 10.19: 不安定な制御対象の安定化

フィードフォワード制御系の特性は

$$P(s)C_{ff}(s) = \frac{10}{(s-1)(s+10)}C_{ff}(s)$$

となるから  $P(s)C_{ff}(s)$  から不安定な極をなくすには、不安定な極を与える  $s-1$  の項をフィードフォワードコントローラ  $C_{ff}$  で打ち消すしかない。そこでフィードフォワードコントローラを

$$C_{ff}(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

とする。このとき

$$P(s)C_{ff}(s) = \frac{10}{(s-1)(s+10)} \frac{s-1}{s+2} = \frac{10}{(s+2)(s+10)}$$

となる。フィードフォワード制御を施した伝達関数  $P(s)C_{ff}(s)$  の極は  $-2, -10 < 0$  であり、安定化できている。

しかしながらここで、10.2 節での考察と同様に、制御対象  $P$  の特性にわずかな変動があったとする。例えば

$$\hat{P}(s) = \frac{10}{(s-1.1)(s+10)}$$

のように、極が  $p_1 = 1$  から 1.1 へ僅かに変動したと考えよう。このとき

$$\begin{aligned} \hat{P}(s)C_{ff}(s) &= \frac{10}{(s-1.1)(s+10)} \frac{s-1}{s+2} \\ &= \frac{10(s-1)}{(s-1.1)(s+2)(s+10)} \end{aligned}$$

であるから、フィードフォワード制御を施した伝達関数  $\hat{P}(s)C_{ff}(s)$  は不安定極 1.1 をもってしまう。このようにフィードフォワード制御では、微小な特性変動も許容することができず、実用的な意味で不安定な制御系を安定化することはできない。

それではつぎに、フィードバック制御の場合を考えてみよう。フィードバックコントローラを、例えば  $C_{fb} = 3$  と選んだとする。目標値  $r$  から出力  $z$  への特性は

$$\begin{aligned} \frac{P(s)C_{fb}}{1+P(s)C_{fb}} &= \frac{\frac{10}{(s-1)(s+10)} \cdot 3}{1 + \frac{10}{(s-1)(s+10)} \cdot 3} = \frac{30}{(s-1)(s+10) + 30} \\ &= \frac{30}{s^2 + 9s - 10 + 30} = \frac{30}{s^2 + 9s + 20} = \frac{30}{(s+4)(s+5)} \end{aligned}$$

で与えられる。フィードバック制御を施した伝達関数  $P(s)C_{fb}/(1+P(s)C_{fb})$  の極は  $-4, -5 < 0$  であり、安定化できている。

フィードフォワード制御に対して考えたのと同様に、制御対象  $P$  の特性に変動があり  $\hat{P}(s) = 10/((s - 1.1)(s + 10))$  となった場合を考えよう。この場合も

$$\begin{aligned} \frac{\hat{P}(s)C_{fb}}{1 + \hat{P}(s)C_{fb}} &= \frac{10}{(s - 1.1)(s + 10)} \cdot 3 = \frac{30}{(s - 1.1)(s + 10) + 30} \\ &= \frac{30}{s^2 + 8.9s - 11 + 30} = \frac{30}{s^2 + 8.9s + 19} \approx \frac{30}{(s + 3.6)(s + 5.3)} \end{aligned}$$

より、フィードバック制御を施した伝達関数  $\hat{P}C_{fb}/(1 + PC_{fb})$  の極は  $-3.6, -5.3 < 0$  であり、制御対象の特性変動を受けても引き続き安定化できている。

10.2 節で確認した、制御対象の特性変動の影響を抑制できる、また 10.3 節で確認した、外乱の影響を抑制できる、に加え、不安定な制御対象を安定化できるは、フィードフォワード制御では達成できない、フィードバック制御のみにより達成できる重要な性質になっている。

## 10.5.2 フィードバックによる不安定化

制御対象

$$P(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 10)}$$

に対するフィードバックコントローラ  $C(s)$  の設計を考えてみよう。はじめに参考に、制御対象  $P(s)$  にステップ入力 Fig. 10.20(b) を加えたときのステップ応答 (Fig. 10.6 参照) を Fig. 10.20(a) に示しておく。制御対象自身の極は  $p_1 = -1, p_2 = -10$  である。安定な制御対象なので、ステップ応答 Fig. 10.20(a) が発散するようなことはない。

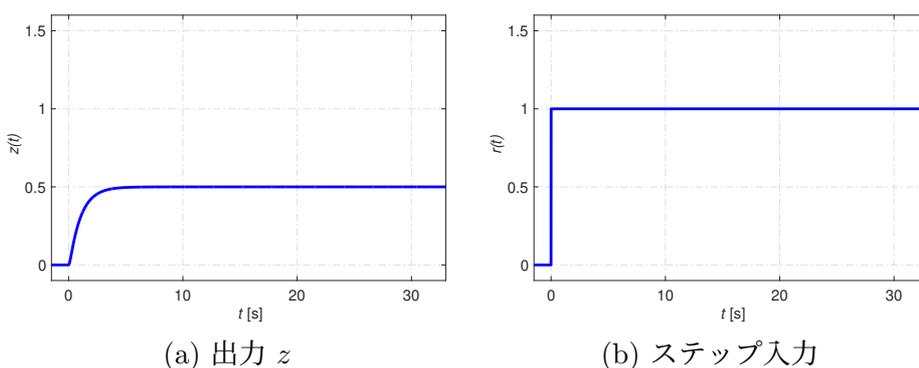
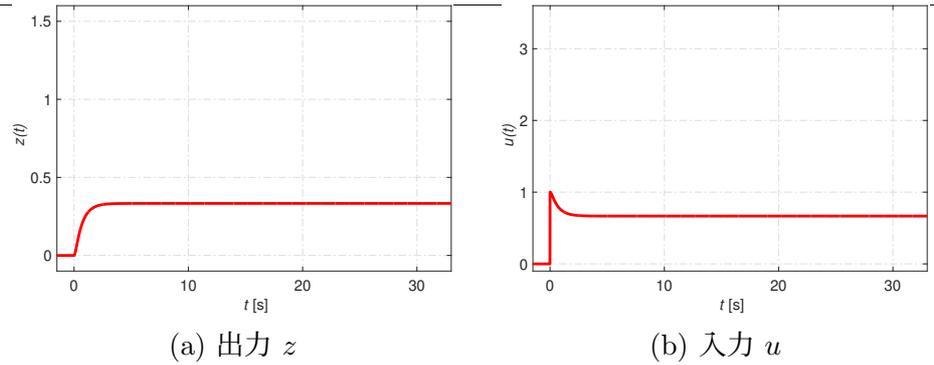
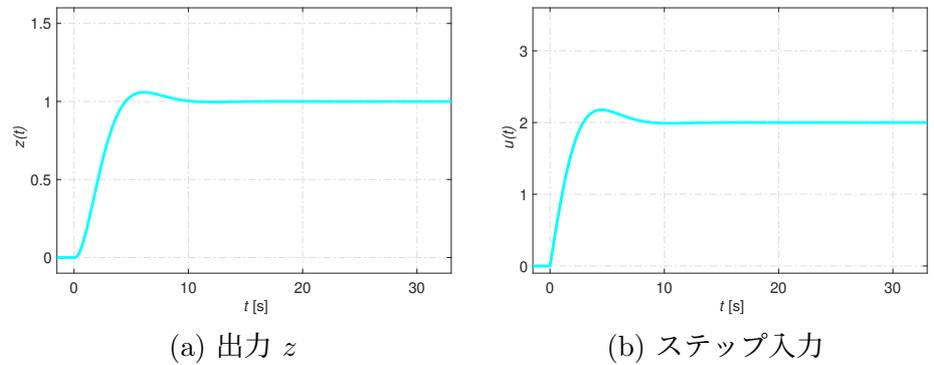


Fig. 10.20: 制御対象  $P$  のステップ応答

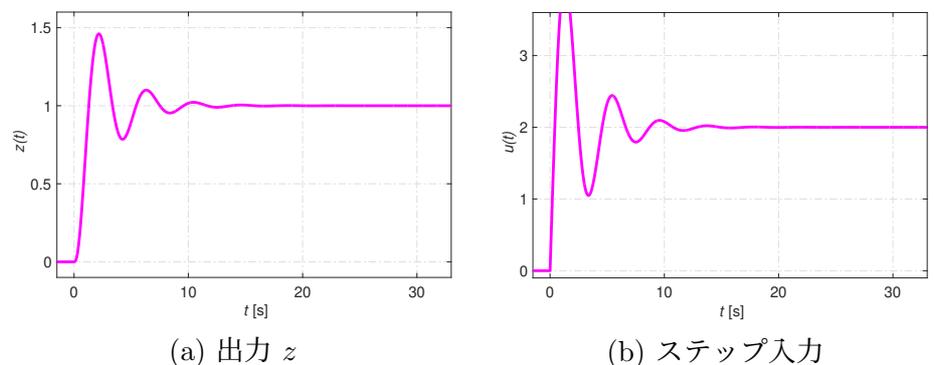
つぎにフィードバック制御系 Fig. 10.3(b) で、 $C(s) = 1$  とした場合のステップ応答  $z$  とこのときのコントローラからの出力 (制御入力)  $u$  を Fig. 10.21 に示す。 $C(s) = 1$  であるから、いわば、ただ単にフィードバックループを繋いだだけ、とも捉えることができる。この場合も一定値に収束するステップ応答 Fig. 10.21(a) がえられている。

Fig. 10.21: フィードバック制御系のステップ応答,  $C(s) = 1$ 

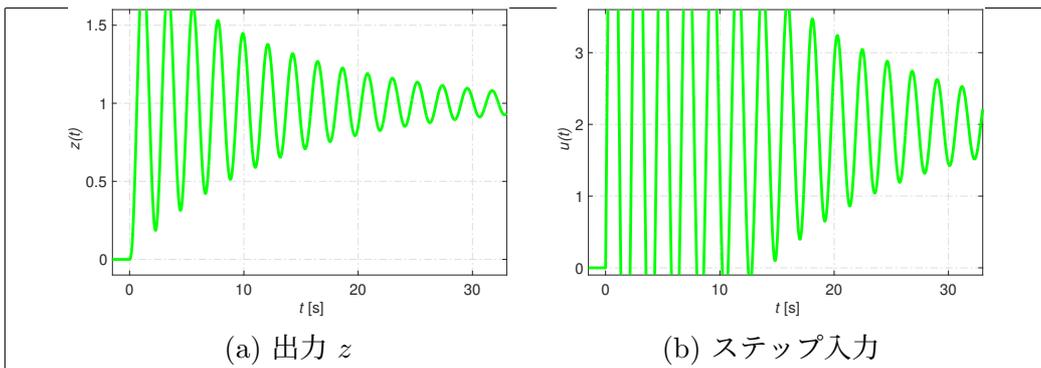
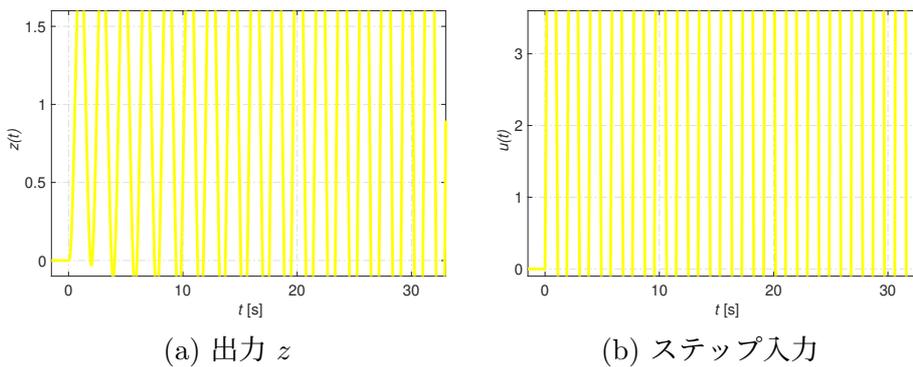
つぎにフィードバックコントローラを  $C(s) = 1/s$  としたときのステップ応答  $z$  とこのときのコントローラからの出力 (制御入力)  $u$  を Fig. 10.22 に示す. フィードバック制御の効果により,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1 = r(t)$  となる良好な応答がえられている.

Fig. 10.22: フィードバック制御系のステップ応答,  $C(s) = 1/s$ 

つぎにフィードバックコントローラを  $C(s) = 5/s$ ,  $C(s) = 18/s$  としたときの応答を, それぞれ Figs. 10.23, 10.24 に示す. フィードバック制御系の応答が, だんだんと振動的になってきていることが確認できる.

Fig. 10.23: フィードバック制御系のステップ応答,  $C(s) = 5/s$ 

さらにフィードバックコントローラを  $C(s) = 24/s$  にすると, このフィードバック制御系は不安定になってしまう. Fig. 10.25 に示す応答から, 出力  $z$  が振動しながら発散する様子が確認できる.

Fig. 10.24: フィードバック制御系のステップ応答,  $C(s) = 18/s$ Fig. 10.25: フィードバック制御系のステップ応答,  $C(s) = 24/s$ 

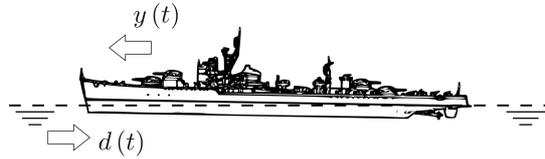
ここでもう一度、制御対象自身のステップ応答 (いわば何もしていない時) Fig. 10.20 から、フィードバック制御を施した Figs. 10.21 10.22, 10.23, 10.24, 10.25 を見比べてみよう。

制御技術者は、フィードバック制御がもつ利点、制御対象の特性変動の影響を抑制できる、外乱の影響を抑制できる、を知っており、良かれと思いフィードバック制御を施したはずである。もちろん適切なフィードバックコントローラが設計されている場合は良好な応答がえられる (Fig. 10.22 参照)。しかしながらそうではない場合は、出力  $z$  の目標値  $r$  への追従が実現できない (Fig. 10.21 参照)、振動的な応答を示してしまう (Figs. 10.23, 10.24 参照)、さらには不安定化させてしまう (Fig. 10.25 参照) ことすらある。これでは、何も制御をしない方 (Fig. 10.20 参照) が良かったのではないかとすら思ってしまう。このようにフィードバック制御系の設計には、あえてフィードバックを施したことにより、制御性能の劣化や制御系の不安定化を引き起こす難しさがある。フィードバック制御系の安定性やフィードバックコントローラの適切な設計法を理解していることが重要である。

フィードバック制御系の安定性については、つぎの 11 章や 13 章で詳しく考える。またフィードバック制御系の基本的な設計法は、12 章や 14 章で考える。これらの内容をよく理解し、適切な制御系を設計できる優れた技術者に成長して欲しい。

## 10.6 演習問題

**演習問題 10.1.** Fig. 10.26 に示すラジコン船の制御にあたり, Fig. 10.27 に示す2つの制御系を考える. ここで, 制御対象  $P = 8$ , 目標値  $r(t) = 6.00$  [m/s] とする.

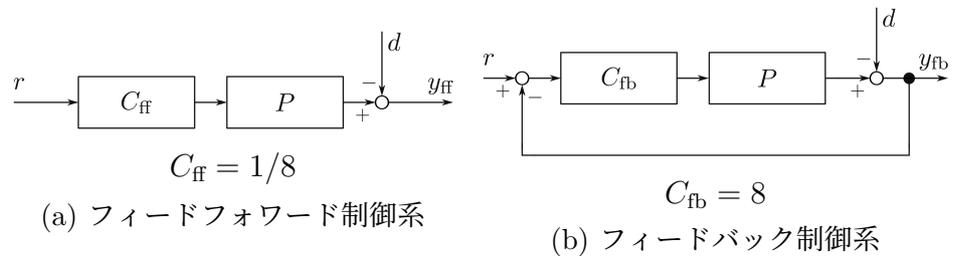


$y(t)$  出力 (ラジコン船の速度)

$d(t)$  外乱 (水流)

$r(t)$  目標値 (目標の速度)

Fig. 10.26: ラジコン船



(a) フィードフォワード制御系

(b) フィードバック制御系

Fig. 10.27: 2つの制御系

1. 外乱がない ( $d = 0$ ) 場合の出力  $y_{ff}(t)$ ,  $y_{fb}(t)$  を求めなさい.
2. 進行方向と逆向きの水流 (外乱)  $d(t) = 1.00$  [m/s] が生じた. このときの出力  $\hat{y}_{ff}(t)$ ,  $\hat{y}_{fb}(t)$  を求めなさい.
3. 外乱はなくなったが, ラジコン船に荷物を載せたことで制御対象の特性が変動してしまった. 変動後の制御対象を  $\hat{P} = 7$  とし, 出力  $\tilde{y}_{ff}(t)$ ,  $\tilde{y}_{fb}(t)$  を求めなさい.

**演習問題 10.2.** 1 A の入力電流毎に 10 m/s の速度がでる電気自動車の制御を考える. Fig. 10.28 のフィードフォワード制御系およびフィードバック制御系について, 以下の間に答えなさい. ただし,  $C^{ff} = \frac{1}{10}$  および  $C^{fb} = 100$  であり, 目標値  $r$  は 5 m/s の定数とする.

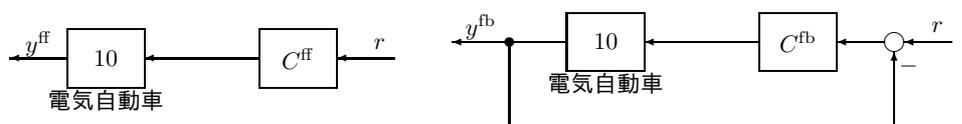


Fig. 10.28: フィードフォワード制御系とフィードバック制御系

1. フィードフォワード制御系における入力  $r$  から出力  $y^{\text{ff}}$  までの伝達関数  $T^{\text{ff}}$  を求めよ.
2. フィードフォワード制御系の出力  $y^{\text{ff}}$  [m/s] を求めよ.
3. フィードバック制御系における入力  $r$  から出力  $y^{\text{fb}}$  までの伝達関数  $T^{\text{fb}}$  を求めよ.
4. フィードバック制御系の出力  $y^{\text{fb}}$  [m/s] を求めよ.
5. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ, 1 A の入力電流毎に 6 m/s の速度しか出なくなった. このときのフィードフォワード制御系の伝達関数  $\hat{T}^{\text{ff}}$  および出力  $\hat{y}^{\text{ff}}$  [m/s] を求めよ.
6. 電気自動車に 5 名乗り込んだところ, 1 A の入力電流毎に 6 m/s の速度しか出なくなった. このときのフィードバック制御系の伝達関数  $\hat{T}^{\text{fb}}$  および出力  $\hat{y}^{\text{fb}}$  [m/s] を求めよ.
7. 制御対象  $P$  の相対的な変動率  $\Delta P$ ,  $T^{\text{ff}}$  の相対的な変動率  $\Delta T^{\text{ff}}$  および  $T^{\text{fb}}$  の相対的な変動率  $\Delta T^{\text{fb}}$

$$\Delta P = \frac{10 - 6}{6} \quad \Delta T^{\text{ff}} = \frac{T^{\text{ff}} - \hat{T}^{\text{ff}}}{\hat{T}^{\text{ff}}} \quad \Delta T^{\text{fb}} = \frac{T^{\text{fb}} - \hat{T}^{\text{fb}}}{\hat{T}^{\text{fb}}}$$

を考える.

- (a)  $\Delta P$  と  $\Delta T^{\text{ff}}$  の関係を論ぜよ.
- (b)  $\Delta P$  と  $\Delta T^{\text{fb}}$  の関係を論ぜよ.

## 10.7 演習問題 サンプル解答

**演習問題サンプル解答 10.1.** 1. フィードフォワード制御系では,  $y_{ff} = PC_{ff}r = 8 \times (1/8)r = r$  より,  $y_{ff} = r = 6.00$  [m/s] となる. フィードバック制御系では,  $y_{fb} = PC_{fb}(r - y_{fb})$  より,  $y_{fb} = (PC_{fb})/(1 + PC_{fb})r$  となる. よって  $y_{fb} = (8 \times 8)/(1 + 8 \times 8)r = 64/65r$  より,  $y_{fb} = (64/65) \times 6.00 \approx 5.90$  [m/s] となる.

2. フィードフォワード制御系では,  $\hat{y}_{ff} = PC_{ff}r - d = r - d$  より,  $\hat{y}_{ff} = 6.00 - 1.00 = 5.00$  [m/s] となる. フィードバック制御系では,  $\hat{y}_{fb} = PC_{fb}(r - \hat{y}_{fb}) - d$  より,  $\hat{y}_{fb} = (PC_{fb})/(1 + PC_{fb})r - 1/(1 + PC_{fb})d$  となる. よって  $y_{fb} = 64/65r - 1/64d$  より,  $y_{fb} = (64/65) \times 6.00 - (1/64) \times 1 \approx 5.89$  [m/s] となる.

3. フィードフォワード制御系では,  $\tilde{y}_{ff} = \tilde{P}C_{ff}r = 7 \times (1/8)r$  より,  $\tilde{y}_{ff} = 7 \times (1/8) \times 6.00 = 5.25$  [m/s] となる. フィードバック制御系では,  $\tilde{y}_{fb} = \tilde{P}C_{fb}(r - \tilde{y}_{fb})$  より,  $y_{fb} = (\tilde{P}C_{fb})/(1 + \tilde{P}C_{fb})r$  となる. よって  $\tilde{y}_{fb} = (7 \times 8)/(1 + 7 \times 8)r = 56/57r$  より,  $\tilde{y}_{fb} = (56/57) \times 6.00 \approx 5.89$  [m/s] となる.

**演習問題サンプル解答 10.2.** 1.  $y^{ff} = PC^{ff}r$  より,  $T^{ff} = PC^{ff} = 10 \times (1/10) = 1$ .

2.  $y^{ff} = T^{ff}r = r = 5$  [m/s].

3.  $y^{fb} = PC^{fb}(r - y^{fb})$  より,  $y^{fb} = (PC^{fb})/(1 + PC^{fb})r$  となる. よって  $T^{fb} = (PC^{fb})/(1 + PC^{fb}) = (10 \times 100)/(1 + 10 \times 100) = 1000/1001$ .

4.  $y^{fb} = T^{fb}r = (1000/1001) \times 5 \approx 5$  [m/s].

5.  $\hat{T}^{ff} = \hat{P}C^{ff}$  より,  $\hat{T}^{ff} = 6 \times (1/10) = 0.6$ .  $\hat{y}^{ff} = \hat{T}^{ff}r$  より,  $\hat{y}^{ff} = 0.6 \times 5 = 3.0$  [m/s].

6.  $\hat{T}^{fb} = (\hat{P}C^{fb})/(1 + \hat{P}C^{fb})$  より,  $\hat{T}^{fb} = (6 \times 100)/(1 + 6 \times 100) = 600/601$ .  $\hat{y}^{fb} = \hat{T}^{fb}r = (600/601) \times 5 \approx 5$  [m/s].

7. (a)

$$\Delta T^{ff} = \frac{T^{ff} - \hat{T}^{ff}}{\hat{T}^{ff}} = \frac{PC^{ff} - \hat{P}C^{ff}}{\hat{P}C^{ff}} = \frac{P - \hat{P}}{\hat{P}} = \Delta P$$

なので, 制御対象  $P$  の相対的な変動率  $\Delta P$  が, そのまま  $T^{ff}$  の相対的な変動率  $\Delta T^{ff}$  となって現れる.

(b)

$$\begin{aligned}
 \Delta T^{\text{fb}} &= \frac{\frac{PC^{\text{fb}}}{1+PC^{\text{fb}}} - \frac{\hat{P}C^{\text{fb}}}{1+\hat{P}C^{\text{fb}}}}{\frac{\hat{P}C^{\text{fb}}}{1+\hat{P}C^{\text{fb}}}} = \frac{\frac{PC^{\text{fb}}}{1+PC^{\text{fb}}}(1+\hat{P}C^{\text{fb}}) - \hat{P}C^{\text{fb}}}{\hat{P}C^{\text{fb}}} \\
 &= \frac{PC^{\text{fb}}(1+\hat{P}C^{\text{fb}}) - (1+PC^{\text{fb}})\hat{P}C^{\text{fb}}}{(1+PC^{\text{fb}})\hat{P}C^{\text{fb}}} \\
 &= \frac{P(1+\hat{P}C^{\text{fb}}) - (1+PC^{\text{fb}})\hat{P}}{(1+PC^{\text{fb}})\hat{P}} \\
 &= \frac{1}{1+PC^{\text{fb}}} \frac{P(1+\hat{P}C^{\text{fb}}) - (1+PC^{\text{fb}})\hat{P}}{\hat{P}} \\
 &= \frac{1}{1+PC^{\text{fb}}} \frac{P - \hat{P}}{\hat{P}} = S\Delta P
 \end{aligned}$$

なので、制御対象  $P$  の相対的な変動率  $\Delta P$  が、 $S$  倍されて  $T^{\text{fb}}$  の相対的な変動率  $\Delta T^{\text{fb}}$  となって現れる。したがって、感度関数  $S$  の小さなフィードバック制御系では、制御対象の変動の影響が出力に現れにくい。



# 第11章 フィードバック制御系の安定性

はじめに

## 第11章のポイント

- フィードバック制御系の安定性を理解しよう.
- 特性多項式を理解しよう.

### 11.1 制御対象とコントローラの表現

Fig. 11.1 のフィードバック制御系を考えよう. 伝達関数の一般系として (2.4) を考えていた. これに倣って, 制御対象の伝達関数  $P(s)$  の一般系として

$$P(s) = \frac{b_{n_p}^p s^{n_p} + b_{n_p-1}^p s^{n_p-1} + \cdots + b_1^p s + b_0^p}{s^{n_d} + a_{n_d-1}^p s^{n_d-1} + \cdots + a_1^p s + a_0^p} \quad n_p < n_d \quad (11.1a)$$

を考えよう. 分子多項式  $N_p(s)$ , 分母多項式  $D_p(s)$  をそれぞれ

$$N_p(s) = b_{n_p}^p s^{n_p} + b_{n_p-1}^p s^{n_p-1} + \cdots + b_1^p s + b_0^p \quad (11.1b)$$

$$D_p(s) = s^{n_d} + a_{n_d-1}^p s^{n_d-1} + \cdots + a_1^p s + a_0^p \quad (11.1c)$$

とにおいて

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (11.1d)$$

のようにあらわすこと, 伝達関数は規約な表現になっていると約束することも (2.4) と同様である. また  $N_p(s)$ ,  $D_p(s)$  が, それぞれ

$$N_p(s) = b_{n_p}^p (s - z_1^p)(s - z_2^p) \cdots (s - z_{n_p}^p) \quad (11.1e)$$

$$D_p(s) = (s - p_1^p)(s - p_2^p) \cdots (s - p_{n_d}^p) \quad (11.1f)$$

のように因数分解できたとすると,  $z_1^p, z_2^p, \dots, z_{n_p}^p$  が制御対象  $P(s)$  の零点,  $p_1^p, p_2^p, \dots, p_{n_d}^p$  が極となる.

制御対象の特性を状態空間表現によりモデリングする場合ももちろん多い. この場合は, 状態空間表現の一般形 (2.3) に倣って

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad x_p(t_0) = x_{p0} \quad (11.2a)$$

$$z(t) = C_p x_p(t) \quad t \geq t_0 \quad (11.2b)$$

$$A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} \quad B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1} \quad C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n_p} \quad (11.2c)$$

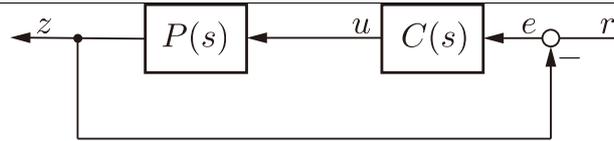


Fig. 11.1: フィードバック制御系

により制御対象の特性をあらわそう. ????? 初期条件  $x_p(t_0)$  を陽に考えることができるのは, 状態空間表現の利点. ????? 状態空間表現 (11.2) からえられる伝達関数  $P(s)$  は, もちろん

$$P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p = \frac{1}{\det(sI - A_p)} C_p \text{adj}(sI - A_p) B_p \quad (11.3)$$

で与えられる (2.3.6 節 参照).

コントローラの特性をあらわす伝達関数  $C(s)$  としては

$$C(s) = \frac{b_{n_n^c}^c s^{n_n^c} + b_{n_n^c-1}^c s^{n_n^c-1} + \cdots + b_1^c s + b_0^c}{s^{n_d^c} + a_{n_d^c-1}^c s^{n_d^c-1} + \cdots + a_1^c s + a_0^c} \quad n_n^c \leq n_d^c \quad (11.4a)$$

を考える. 分子多項式  $N_c(s)$ , 分母多項式  $D_c(s)$  をそれぞれ

$$N_c(s) = b_{n_n^c}^c s^{n_n^c} + b_{n_n^c-1}^c s^{n_n^c-1} + \cdots + b_1^c s + b_0^c \quad (11.4b)$$

$$D_c(s) = s^{n_d^c} + a_{n_d^c-1}^c s^{n_d^c-1} + \cdots + a_1^c s + a_0^c \quad (11.4c)$$

とにおいて

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (11.4d)$$

のようにあらわすこと, 伝達関数は規約な表現になっていると約束すること, また  $N_c(s)$ ,  $D_c(s)$  が, それぞれ

$$N_c(s) = b_{n_n^c}^c (s - z_1^c)(s - z_2^c) \cdots (s - z_{n_n^c}^c) \quad (11.4e)$$

$$D_c(s) = (s - p_1^c)(s - p_2^c) \cdots (s - p_{n_d^c}^c) \quad (11.4f)$$

のように因数分解できたとすると  $z_1^c, z_2^c, \dots, z_{n_n^c}^c$  がコントローラ  $C(s)$  の零点,  $p_1^c, p_2^c, \dots, p_{n_d^c}^c$  が極を与えることも, 制御対象  $P(s)$  の場合と同様である. ただしここで, 制御対象の伝達関数  $P(s)$  における  $n_n^p < n_d^p$  とは異なり,  $n_n^c \leq n_d^c$  のように, 分子多項式  $N_c(s)$  の次数  $n_n^c$  と分母多項式  $D_c(s)$  の次数  $n_d^c$  が等しい場合  $n_n^c = n_d^c$  も含めて考えている点に注意しよう.

これは例えば, 偏差  $e(t) = r(t) - z(t)$  を3倍して出力  $u(t)$  とするような非常に単純なコントローラを例に考えてもわかるように

$$u = 3e = \frac{3}{1}e \quad (11.5)$$

と, 次数  $n_n^c$  と次数  $n_d^c$  が等しい場合を考える必要があるからである<sup>1</sup>. もう少し具体的な例として, 例えば偏差  $e(t)$  の3倍と偏差  $e(t)$  を積分した値を加えて出力  $u(t)$  とするコントローラと考えてみても

$$u = 3e + \frac{1}{s}e = \frac{3s+1}{s}e \quad (11.6)$$

<sup>1</sup>この場合は,  $n_n^c = 0 = n_d^c$  となっている

のように,  $n_n^c = n_d^c$  を考える必要がある<sup>2</sup>.

コントローラの特性をあらわす状態空間表現も考えておこう. コントローラの特性をあらわす状態空間表現は

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \quad x_c(t_0) = x_{p0} \quad (11.7a)$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t) \quad t \geq t_0 \quad (11.7b)$$

$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1} \quad C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c} \quad D_c \in \mathbb{R} \quad (11.7c)$$

を考える必要がある. ここで制御対象の特性をあらわす状態空間表現 (11.2) とは異なり,  $D_c$  であらわされる  $e(t)$  が直接  $u(t)$  に影響を与える項は, やはり  $n_n^c = n_d^c$  の場合を考えるために必要になる.

実際 (11.5) の例では,  $A_c = 0, B_c = 0, C_d = 0, D_c = 3$  のように, 実際には状態変数  $x_c$  を必要としない静的なコントローラになっている. また (11.6) は, 状態変数  $x_c$  が必要な動的なコントローラの例になっているが

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 1e(t)$$

$$u(t) = 1x_c(t) + 3e(t)$$

のように, やはり  $D_c = 3$  が必要なコントローラになっている<sup>3</sup>.

状態空間表現 (11.7) からえられる伝達関数  $C(s)$  も考えておこう. 2.3.6 節での計算と同様に, 状態方程式 (11.7a) のラプラス変換を考えて

$$x_c(s) = (sI - A_c)^{-1} B_c e(s)$$

がえられる. またこれより

$$\begin{aligned} u(s) &= C_c x_c(s) + D_c e(s) \\ &= C_c (sI - A_c)^{-1} B_c e(s) + D_c e(s) \\ &= (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) e(s) \end{aligned}$$

となる. したがって, 状態空間表現 (11.7) からえられる伝達関数  $C(s)$  は

$$\begin{aligned} C(s) &= D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c \\ &= D_c + \frac{1}{\det(sI - A_c)} C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c \\ &= \frac{D_c \det(sI - A_c) + C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c}{\det(sI - A_c)} \end{aligned} \quad (11.8)$$

で与えられる.

## 11.2 フィードバック制御系の安定性: 有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性を考えるため, はじめに簡単な二つの例を確認してみよう.

<sup>2</sup>この場合は,  $n_n^c = 1 = n_d^c$  となっている

<sup>3</sup>ラプラス変換を考え, この状態空間表現が, 確かに (11.6) と一致することを確認してみよう.

例題 11.1. 制御対象  $P$ , コントローラ  $C$  が, それぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

と与えられた時のフィードバック制御系 Fig. 11.1 の応答をみてみよう.

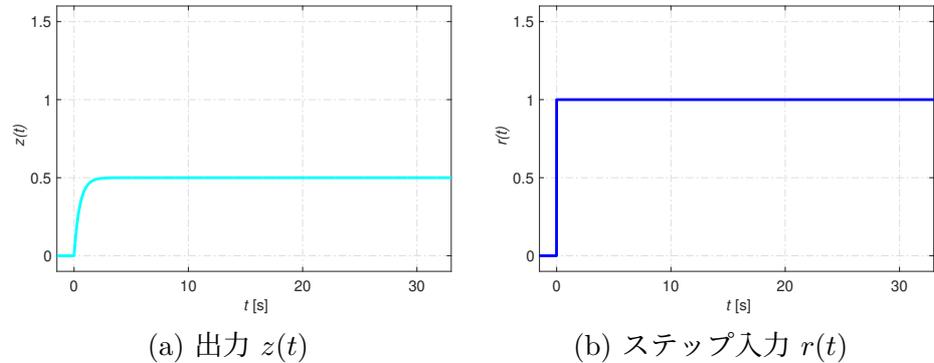


Fig. 11.2: ステップ応答

Fig. 11.2(b) の目標値  $r(t) = 1$  を加えた時の出力  $z$ , つまりステップ応答は, Fig. 11.2(a) のようになる. Fig. 11.2(a) からは, 出力  $z$  が発散するような不安定な挙動は確認できない. □

例題 11.2. 例題 11.1 の制御対象  $P$ , コントローラ  $C$  をもう一度考えよう. ただしここでは, Fig. 11.3 のように外乱  $w$  が加わる時の応答を考える.

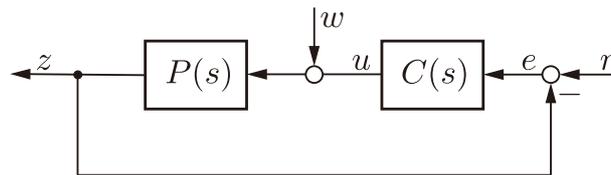


Fig. 11.3: 外乱  $w$  を考慮したフィードバック制御系

Fig. 11.2(b) の目標値  $r$  に加え, Fig. 11.4(b) の外乱  $w$  が加わった時の出力  $z$  は Fig. 11.4(a) のようになる.

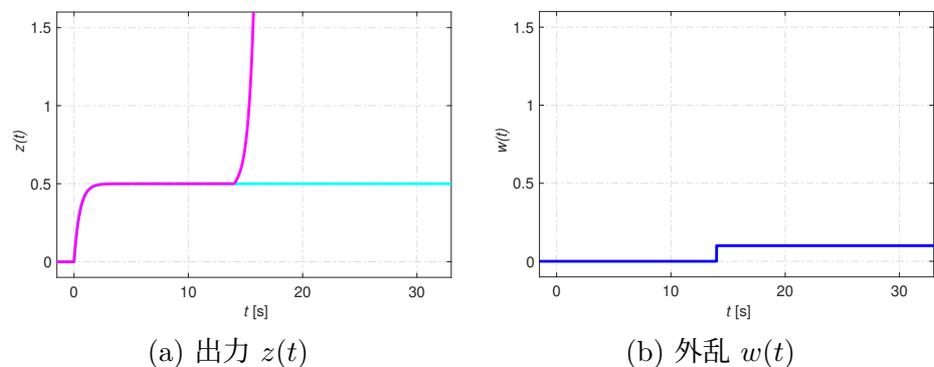


Fig. 11.4: 外乱  $w = 0.1$  が加わる場合の応答

例題 11.1 で確認した応答では, 目標値  $r$  から出力  $z$  の特性に不安定な挙動は確認できないようにみえた. しかしながら Fig. 11.4 で確認できるように,

この制御系は微小な外乱  $w$  が加わるだけで、出力  $z$  が発散してしまう。これでは、制御対象  $P(s) = 1/(s-2)$  とコントローラ  $C(s) = (s-2)/(s+1)$  から構成されるフィードバック制御系は、実用的な制御系になっているとは言えない。実用的なフィードバック制御系が備えているべき性質として、フィードバック制御系の安定性をどのように考えればよいのであろうか？ □

例題 11.1, 11.2 で確認できた事実も踏まえて、フィードバック制御系の安定性をどのように考えればよいのであろうか？実はつぎのように考えれば、フィードバック制御系の安定性はそれほど複雑な問題ではない。

フィードバック制御系 Fig. 11.3 を構成する物理的な要素は、制御対象  $P$  とコントローラ  $C$  の二つのみである。またこの制御対象  $P$  とコントローラ  $C$  は、それぞれが入力端と出力端をもち、何かしらの信号が入力として加えられると、その特性にしたがって出力を生成する。Fig. 11.5(a) に示す制御対象  $P$  と Fig. 11.5(b) に示すコントローラ  $C$  では、それぞれの入力を  $w$  と  $r$  で、また出力を  $z$  と  $u$  であらわしている。

この制御対象  $P$  とコントローラ  $C$  をフィードバック結合により繋げたものが、フィードバック制御系 Fig. 11.5(c) である。まずここで、Fig. 11.5(c) と Fig. 11.3 が全く同じものをあらわしていることを確認して欲しい。

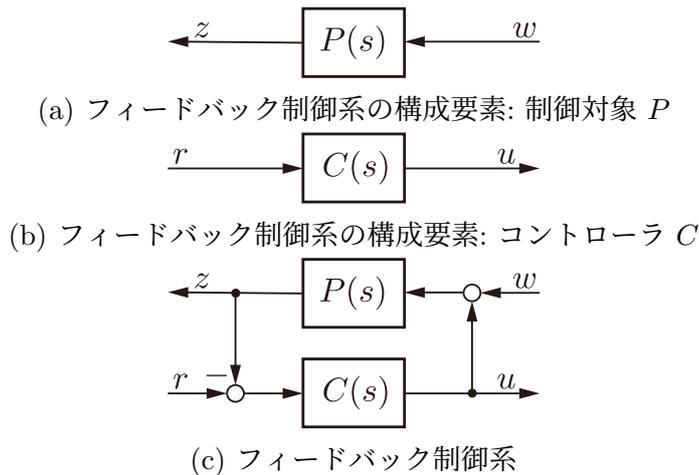


Fig. 11.5: フィードバック制御系の安定性

このように考えると、フィードバック制御系を構成する物理的な要素に対して、外部から加わる信号は、本質的に  $w$  あるいは  $r$  の入力端から加わるしかない。またフィードバック制御系で生成される信号は、制御対象  $P$  の出力端にあらわれる  $z$  とコントローラ  $C$  の出力端にあらわれる  $u$  のみである。

7章では、動的なシステムの安定性として、任意の有界入力に対する出力が有界という性質 (有界入力有界出力安定性) を考えた。この考えをフィードバック制御系に対してあてはめれば、二つの任意の有界入力  $w$  と  $r$  に対する二つの出力  $z$  と  $u$  が有界ならば、有界入力有界出力の意味で安定と考えることができる。

**定義 11.1** (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性). フィードバック制御系 Fig. 11.5(c) (Fig. 11.3) に入力  $w, r$  を加えたときの出力  $z, u$  を考

える. 任意の有界入力  $w, r$  に対する出力  $z, u$  が有界であるならば, フィードバック制御系は有界入力有界出力安定であるという.  $\square$

それでは, フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を与える条件を具体的に考えていこう. フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 11.5(c) (Fig. 11.3) から

$$\begin{aligned} z &= P(s)(u + w) = P(s)u + P(s)w \\ &= P(s)C(s)(r - z) + P(s)w \end{aligned}$$

である. これを変形し

$$\begin{aligned} (1 + P(s)C(s))z &= P(s)C(s)r + P(s)w \\ z &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}r + \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}w \end{aligned}$$

がえられる. 同様に

$$\begin{aligned} u &= C(s)(r - z) = C(s)r - C(s)z \\ &= C(s)r - C(s)P(s)(u + w) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} (1 + C(s)P(s))u &= C(s)r - C(s)P(s)w \\ u &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}r - \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}w \end{aligned}$$

がえられる.

ここで  $r$  から  $z$  への伝達関数を  $G_{zr}(s) = P(s)C(s)/(1 + P(s)C(s))$  とあらわし, ほかの三つの伝達関数もそれぞれ  $G_{zw}(s), G_{ur}(s), G_{uw}(s)$  とあらわすことにすれば, 入力  $w, r$  から出力  $z, u$  への特性は

$$\begin{aligned} z &= G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r \\ u &= G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r \end{aligned} \tag{11.9a}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} & G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} & G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} \end{aligned} \tag{11.9b}$$

とまとめることができる.

ここで (11.9a) から分かるように, 二つの伝達関数  $G_{zw}(s), G_{zr}(s)$  が共に有界入力有界出力安定ならば, 任意の有界入力  $w, r$  に対する出力  $z$  は有界になる. 同様に, 伝達関数  $G_{uw}(s), G_{ur}(s)$  が共に有界入力有界出力安定ならば, 任意の有界入力  $w, r$  に対する出力  $u$  は有界になる. つまりフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性と等価な条件として

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

(四つの伝達関数  $G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s)$  がすべて有界入力有界出力安定)

が確認できた。

7章では、一般の伝達関数  $G(s)$  の有界入力有界出力安定性と等価な条件として、伝達関数  $G(s)$  のすべての極の実数部が負であることも確認していた。つまり四つの伝達関数  $G_{zw}(s)$ ,  $G_{zr}(s)$ ,  $G_{uw}(s)$ ,  $G_{ur}(s)$  の極をそれぞれ求め、すべての極の実数部が負であることが確認できれば、フィードバック制御系の安定性が結論できる。

**例題 11.3.** 例題 11.1, 11.2 のフィードバック制御系をもう一度考えよう。目標値  $r$  から出力  $z$  までの伝達関数  $G_{zr}(s) = (P(s)C(s))/(1+P(s)C(s))$  に制御対象  $P(s) = 1/(s-2)$  とコントローラ  $C(s) = (s-2)/(s+1)$  を代入し

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}}{1 + \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}} = \frac{s-2}{(s-2)(s+1) + (s-2)} \\ &= \frac{s-2}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s-2}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

となる。  $G_{zr}(s)$  は一つの極  $p_1 = -2$  を持つ安定な伝達関数である。これが Fig. 11.4 のステップ応答で不安定な挙動が確認できなかった理由である。

同様に  $G_{zw}(s)$  を求めよう。

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-2}}{1 + \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-2)(s+1) + (s-2)} \\ &= \frac{s+1}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s+1}{(s-2)(s+2)} \end{aligned}$$

$G_{zw}(s)$  は安定な極  $p_1 = -2$  と不安定な極  $p_2 = 2$  を持つ不安定な伝達関数となっている。これが Fig. 11.4 の応答が発散した理由である。

制御対象  $P(s) = 1/(s-2)$  とコントローラ  $C(s) = (s-2)/(s+1)$  から構成されるフィードバック制御系は、不安定な伝達関数  $G_{zw}(s)$  を持つ<sup>4</sup>、したがって安定な制御系にはなっていない。 □

## 11.3 特性多項式

11.2 節では、フィードバック制御系の安定を考え、四つの伝達関数  $G_{zw}(s)$ ,  $G_{zr}(s)$ ,  $G_{uw}(s)$ ,  $G_{ur}(s)$  がすべて安定であることが、フィードバック制御系の安定性と等価であることを確認した。ここでは、フィードバック制御系の安定性を教えてくれる、特性多項式を考える。

制御対象の伝達関数  $P(s)$ , コントローラの伝達関数  $C(s)$  共に、分母と分子の多項式  $N_p(s)$ ,  $D_p(s)$ ,  $N_c(s)$ ,  $D_c(s)$  の比により

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

<sup>4</sup>残り二つの伝達関数  $G_{uw}(s)$ ,  $G_{ur}(s)$  の安定性はどうであろうか？確認してみよう。

とあらわすことを考えていた ((11.1), (11.4) 参照). また 11.2 節で確認したように, フィードバック制御系の安定性は (15.1b) の四つの伝達関数

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} & G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} & G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} \end{aligned}$$

がすべて安定なことと等価であった. この四つの伝達関数を多項式  $N_p(s)$ ,  $D_p(s)$ ,  $N_c(s)$ ,  $D_c(s)$  を使ってあらわしてみよう.

伝達関数  $G_{zw}(s)$  は

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

とあらわせる. ほかの三つの伝達関数も同様に求めることができる.

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = -\frac{\frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{N_c(s)}{D_c(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

あらためてまとめると、四つの伝達関数は

$$\begin{aligned}
 G_{zw}(s) &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{zr}(s) &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{uw}(s) &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{ur}(s) &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

のように表現できる。四つの伝達関数の分母多項式は、共通に  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  になっている。

一般の伝達関数  $G(s)$  の安定性として、

$$\begin{aligned}
 (\text{有界入力有界出力安定}) &\Leftrightarrow (\text{ステップ応答が有界の意味で安定}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{伝達関数 } G \text{ のすべての極の実数部が負}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{「分母多項式」} = 0 \text{ のすべての根の実数部が負}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{Re}[p_i] < 0 \text{ for all } p_i \in P(G))
 \end{aligned}$$

を確認していた (7.4 節 参照)。ここで四つの伝達関数の分母多項式は共通に  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  である。したがって  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実部が負ならば、四つの伝達関数が安定、つまりフィードバック制御系が安定となる。さらにこの逆 (四つの伝達関数が安定ならば、 $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実部が負になる) も示すことができる<sup>5</sup>。つまりフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性と等価な条件として

$$\begin{aligned}
 &(\text{フィードバック制御系は有界入力有界出力安定}) \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(\text{四つの伝達関数 } G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s) \text{ が} \\
 &\quad \text{すべて有界入力有界出力安定}) \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0 \text{ のすべての根の実数部が負})
 \end{aligned}$$

が確認できた。

$\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  は、フィードバック制御系の安定性を教えてくれる大切な多項式で、特性多項式と呼ばれる。また「特性多項式」= 0 の根は、(フィードバックループを、Fig. 11.5(c) (Fig. 11.3) のように、閉じてえられる) 四つの伝達関数の極を与えることから、**閉ループ極** と呼ぶことにする。さらに実部が負の閉ループ極を安定な閉ループ極、そうではないものを不安定な閉ループ極と呼ぶことにする。

<sup>5</sup>演習問題 11.5 参照

**例題 11.4.** 例題 11.1, 11.2, 11.3 のフィードバック制御系をもう一度考えよう.  $P(s) = 1/(s-2)$ ,  $C(s) = (s-2)/(s+1)$  より, 分母, 分子の多項式は, それぞれ

$$\begin{aligned} N_p(s) &= 1 & (n_n^p &= 0) & D_p(s) &= s-2 & (n_d^p &= 1) \\ N_c(s) &= s-2 & (n_n^c &= 1) & D_c(s) &= s+1 & (n_d^c &= 1) \end{aligned}$$

となっている. 特性多項式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  は

$$\begin{aligned} \phi(s) &= D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = (s+1)(s-2) + (s-2) \times 1 \\ &= (s+1+1)(s-2) = (s+2)(s-2) \end{aligned}$$

となる. したがって  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根である閉ループ極は  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = 2$  である. 不安定な閉ループ極  $p_2 = 2 > 0$  があるから, フィードバック制御系が安定はないことが確認できる. これは例題 11.3 で確認した結果とももちろん一致する.  $\square$

**matlab note 11.1** (poly2sym, solve). 例えば, 例題 11.4 の特性多項式  $\phi(s)$  と  $\phi(s) = 0$  を満たす閉ループ極は

```
1: syms s;
2: np( s ) = poly2sym( [ 1 ], s )
3: dp( s ) = poly2sym( [ 1 -2 ], s )
4: nc( s ) = poly2sym( [ 1 -2 ], s )
5: dc( s ) = poly2sym( [ 1 1 ], s )
6: phi( s ) = dc( s ) * dp( s ) + nc( s ) * np( s )
7: phi( s ) = simplify ( phi( s ) )
8: solve ( phi( s ) == 0 )
```

のように計算できる.  $\square$

**例題 11.5.** 例題 11.1, 11.2, 11.3 11.4 のフィードバック制御系で, コントローラを  $C(s) = 5(s+1)/s$  に変更してみよう.

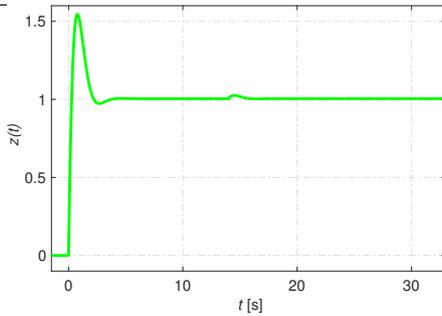
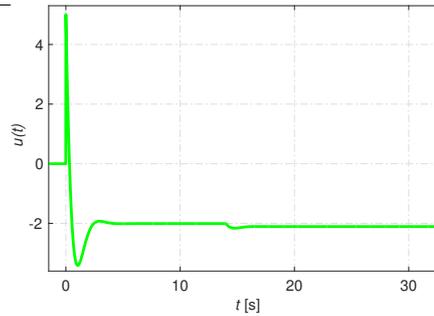
分母, 分子の多項式は, それぞれ

$$\begin{aligned} N_p(s) &= 1 & (n_n^p &= 0) & D_p(s) &= s-2 & (n_d^p &= 1) \\ N_c(s) &= 5(s+1) & (n_n^c &= 1) & D_c(s) &= s & (n_d^c &= 1) \end{aligned}$$

となっている. 特性多項式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  は

$$\begin{aligned} \phi(s) &= D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = s(s-2) + 5(s+1) \times 1 \\ &= s^2 - 2s + 5s + 5 = s^2 + 3s + 5 \end{aligned}$$

であり,  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根である閉ループ極は  $p_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2$  と求めることができる.  $\text{Re}[p_{1,2}] = -3/2 < 0$  であるから, 二つの閉ループ極は共に安定であり, 新しいコントローラ  $C(s) = 5(s+1)/s$  により構成されるフィードバック制御系は有界入力有界出力安定である.

(a) 出力  $z(t)$ (b) 入力  $u(t)$ Fig. 11.6: 外乱  $w = 0.1$  が加わる場合の応答

新しいコントローラ  $C(s) = 5(s+1)/s$  で構成したフィードバック制御系に Fig. 11.2(b) の目標値  $r(t) = 1$  と Fig. 11.3 の外乱  $w$  を加えたときの応答を Fig. 11.6 に示す。

Fig. 11.6 では, Fig. 11.4(a) とは異なり, 外乱の影響も抑制できる良好な応答がえられている。□

**例題 11.6.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)}$  とコントローラ  $C(s) = \frac{1}{s}$  を考える時は,

$$N_p(s) = 1 \quad (m_p = 0) \quad D_p(s) = (s+0.1)(s+1) \quad (n_p = 2)$$

$$N_c(s) = 1 \quad (m_c = 0) \quad D_c(s) = s \quad (n_c = 1)$$

となる。

特性多項式は

$$\begin{aligned} \phi(s) &= N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = 1 \times 1 + (s+0.1)(s+1) \times s \\ &= s^3 + 1.1s^2 + 0.1s + 1 \end{aligned}$$

であり, 閉ループ極 ( $\phi(s) = 0$  の根) を数値計算により求めてみると  $-1.48, 0.19 \pm 0.8j$  がえられる。実部が正の根が 2 つあることから, フィードバック制御系は内部安定にはなっていない<sup>6</sup>。□

**例題 11.7.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s-1}$  と  $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$  の場合は,

$$N_p(s) = 1 \quad (m_p = 0) \quad D_p(s) = s-1 \quad (n_p = 1)$$

$$N_c(s) = s-1 \quad (m_c = 1) \quad D_c(s) = s+1 \quad (n_c = 1)$$

を考えることになる。

特性多項式は

$$N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = 1 \times (s-1) + (s-1) \times (s+1) = (s-1)(s+2)$$

<sup>6</sup>制御対象  $P(s)$  自体は安定であったが, これに積分器  $C(s) = \frac{1}{s}$  をコントローラとして使ってみたところ, 不安定な制御系ができてしまったという例になっている

であり, 不安定極 1 があるので, この場合もフィードバック制御系は内部安定にはならない<sup>7</sup>. □

## 11.4 フィードバック制御系の安定性: 漸近安定性

フィードバック制御系 Fig. 11.5(c) (Fig. 11.3) で, 制御対象  $P$ , コントローラ  $C$  が (11.2), (11.7) の状態空間表現で与えられる場合を考えよう. はじめに, フィードバック制御系全体を表現する状態空間表現を求めよう.

$e(t) = r(t) - z(t) = r(t) - C_p x_p(t)$  であるので, (11.7a) より

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) = A_c x_c(t) + B_c (r(t) - C_p x_p(t)) \\ &= -B_c C_p x_p(t) + A_c x_c(t) + B_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる. 同様に (11.7b) より

$$\begin{aligned}u(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) = C_c x_c(t) + D_c (r(t) - C_p x_p(t)) \\ &= -D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる. この  $u(t)$  を (11.2a) に代入して

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p (w(t) + u(t)) \\ &= A_p x_p(t) + B_p (w(t) - D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t)) \\ &= (A_p - B_p D_c C_p) x_p(t) + B_p C_c x_c(t) + B_p w(t) + B_p D_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

がえられる. (11.2b) の

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

も併せて, 二つの入力  $w, r$  から, 二つの出力  $z, u$  への特性をあらわすフィードバック制御系全体の状態空間表現

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq t_0\end{aligned}$$

<sup>7</sup>制御対象の不安定極とコントローラの不安定零点が打ち消される, 不安定な極零相殺と呼ばれる状況の例になっている. 実際には, 不安定な極零相殺が生じると, フィードバック制御系は内部安定にはならないことが知られていて, 閉ループ極を求めなくても不安定と判定できる.

がえられる.

7.1.4 節では, 状態空間表現により与えられたシステムの安定性として, 漸近安定性を考えた. 漸近安定性は, 外部からの入力を 0 とし, 初期状態  $x(t_0)$  からの零入力応答に着目したものだ. フィードバック制御系に対しても入力  $w, r$  を共に 0 とした

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0 \quad (11.11)$$

の解, つまりフィードバック制御系の零入力応答を考えよう.

**定義 11.2** (フィードバック制御系の漸近安定性). 任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する (11.11) の解 (零入力応答) が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるならば, フィードバック制御系は漸近安定という.  $\square$

7.8 節では, 状態空間表現により与えられたシステムの漸近安定と等価な条件として

$$\begin{aligned} (\text{漸近安定}) &\Leftrightarrow (\text{行列 } A \text{ のすべての固有値の実数部が負}) \\ &\Leftrightarrow (\text{Re}[\lambda_i] < 0 \text{ for all } \lambda_i \in \Lambda(A)) \end{aligned}$$

を確認していた. したがってこれより, フィードバック制御系の漸近安定性と等価な条件

(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

$$(\text{行列 } \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \text{ のすべての固有値の実数部が負})$$

がえられる.

**例題 11.8.** 例題 11.5 のフィードバック制御系をもう一度考えよう. 制御対象  $P(s) = 1/(s-2)$ , コントローラ  $C(s) = 5(s+1)/s$  を与える状態空間表現として

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= 2x_p(t) + u(t) & \dot{x}_c(t) &= 0x_c(t) + 2e(t) \\ z(t) &= x_p(t) & u(t) &= 2.5x_c(t) + 5e(t) \end{aligned}$$

を考える<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>二つの状態空間表現から伝達関数を求め,  $P(s) = 1/(s-2)$ ,  $C(s) = 5(s+1)/s$  がえられることを確認しよう.

行列

$$\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 5 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有値は

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2.5 \\ 2 & s \end{bmatrix}) \\ &= \lambda(\lambda + 3) + 5 = \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

より  $\lambda_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2$  と求めることができる.  $\text{Re}[\lambda_{1,2}] = -3/2 < 0$  であるから, フィードバック制御系は漸近安定である.  $\square$

**matlab note 11.2** (feedback, pole). 例題 11.8 の固有値  $\lambda_{1,2}$  は, 例えば

```
1: ap = 2; bp = 1; cp = 1; dp = 0;
2: sys_p = ss( ap, bp, cp, dp )
3: ac = 0; bc = 2; cc = 2.5; dc = 5;
4: sys_c = ss( ac, bc, cc, dc )
5: sys_l = sys_p * sys_c;
6: sys = feedback( sys_l, 1 )
7: pole( sys )
```

のように計算できる.  $\square$

### 11.4.1 漸近安定性と有界入力有界出力安定性

7.8 節では, 状態空間表現により与えられたシステムの安定性として, 漸近安定性を考えた. さらに, 漸近安定であるならば, この状態空間表現が与える伝達関数は, 有界入力有界出力安定にもなることを確認した. この性質は, フィードバック制御系についても成立する. ここでは, 漸近安定なフィードバック制御系は, 有界入力有界出力安定でもあることを確認しておこう. 以下では簡単のため, 制御対象  $P$  とコントローラ  $C$  の状態空間表現から伝達関数を求める際の計算 (11.3), (11.8) において, (4.4) で確認したような, 共通因子の消去は生じないと仮定する. つまり分母, 分子の多項式が, (4.5) で確認したように, それぞれ

$$N_p(s) = C_p \text{adj}(sI - A_p) B_p \quad (11.12a)$$

$$D_p(s) = \det(sI - A_p) \quad (11.12b)$$

$$N_c(s) = D_c \det(sI - A_c) + C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c \quad (11.12c)$$

$$D_c(s) = \det(sI - A_c) \quad (11.12d)$$

で与えられると仮定する.

フィードバック制御系の漸近安定性は、行列  $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  の固有値、つまり方程式  $\det(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}) = 0$  の根により特徴づけられた。一方、有界入力有界出力安定性は、方程式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  の根により特徴づけられた。したがって多項式  $\det(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix})$  と多項式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  が一致することが確認できれば、二つの方程式の根も一致する。

それでは、計算はやや煩雑になるが、行列  $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  の固有値を求めるための多項式  $\det(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix})$  が、特性多項式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  に一致することを確認しよう。なお以下の計算では、11.4.2 節にまとめるブロック行列の行列式に関する計算式を利用している。はじめに

$$\begin{aligned} \det(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}) \\ = \det(sI - A_c) \det(sI - A_p + B_p D_c C_p + B_p C_c (sI - A_c)^{-1} B_c C_p) \end{aligned}$$

として、右辺 2 項目のみを考えると

$$\begin{aligned} \det(sI - A_p + B_p D_c C_p + B_p C_c (sI - A_c)^{-1} B_c C_p) \\ = \det(sI - A_p + B_p (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p) \\ = \det((sI - A_p)(I + (sI - A_p)^{-1} B_p (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p)) \\ = \det(sI - A_p) \det((I + (sI - A_p)^{-1} B_p (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p)) \\ = \det(sI - A_p) \det((1 + (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p (sI - A_p)^{-1} B_p)) \\ = \det(sI - A_p) (1 + (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p (sI - A_p)^{-1} B_p) \end{aligned}$$

となる。ここで (11.12) に注意すると

$$\begin{aligned} \det(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}) &= \det(sI - A_c) \times \\ &\det(sI - A_p) (1 + (D_c + C_c (sI - A_c)^{-1} B_c) C_p (sI - A_p)^{-1} B_p) \\ &= \det(sI - A_c) \det(sI - A_p) \times \\ &(1 + \frac{D_c \det(sI - A_c) + C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c}{\det(sI - A_c)} \frac{C_p \text{adj}(sI - A_p) B_p}{\det(sI - A_p)}) \\ &= D_c(s) D_p(s) (1 + \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{N_p(s)}{D_p(s)}) \\ &= D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s) \end{aligned}$$

となり, 特性多項式  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  に一致することが確認できた.

これより, フィードバック制御系の安定性として

(フィードバック制御系は漸近安定)

$\Leftrightarrow$

(行列  $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  のすべての固有値の実数部が負)

$\Rightarrow$

$(D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0)$  すべての根の実数部が負)

$\Leftrightarrow$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

のようにまとめることができる.

????? なおここで 二つ目の矢印が  $\Rightarrow$  であり  $\Leftrightarrow$  でないのは?????

**例題 11.9.** 例題 11.5, 11.8 のフィードバック制御系をもう一度考えよう. 例題 11.8 で確認したように, フィードバック制御系は漸近安定である. したがってまた有界入力有界出力安定でもある. これは例題 11.5 で確認した結果とももちろん一致する.  $\square$

## 11.4.2 補足

ここでは, 11.4.1 節の計算に利用したブロック行列の行列式に関する事実を補足としてまとめておく.

1. 積  $MN$  ( $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  で  $M$  と  $N$  が可換とは限らない) の行列式は, それぞれの行列式に等しい:

$$\det MN = \det NM = \det M \det N$$

2. ブロック行列

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

の行列式を求めるためのラプラス展開を考えれば

$$\det \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} = \det M_{11} \det M_{22}$$

がえられる.

3. 2 に注意して

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{12}M_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{22}^{-1}M_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

のそれぞれの行列式をとることで

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} &= \det M_{11} \det (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}) \\ &= \det M_{22} \det (M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}) \end{aligned}$$

がえられる.

4. 3 で  $M_{11} = I$ ,  $M_{22} = I$  の場合を考えると

$$\det(I - M_{21}M_{12}) = \det(I - M_{12}M_{21})$$

がえられる.

5. 4 でとくに  $M_{11} = 1$  であった場合は,

$$\det(I - M_{21}M_{12}) = \det(1 - M_{12}M_{21}) = 1 - M_{12}M_{21}$$

となる.

## 11.5 演習問題

**演習問題 11.1.** 特性多項式  $\phi(s)$  が以下で与えられるフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を判定しなさい。

1.  $\phi(s) = s^2 + 2s$
2.  $\phi(s) = s^2 + 2s + 1$
3.  $\phi(s) = s^2 + 1$
4.  $\phi(s) = s^2 - s + 1$
5.  $\phi(s) = 25(s - 1) + (s + 10)(s - 1)s$

**演習問題 11.2.** フィードバック制御系 Fig. 11.3 を考える。制御対象  $P(s)$ 、コントローラ  $C(s)$  が以下で与えられる場合の有界入力有界出力安定性を判定しなさい。

1.  $P(s) = \frac{1}{s-1}$     $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$
2.  $P(s) = \frac{1}{s^2-4}$     $C(s) = \frac{s-2}{s+1}$
3.  $P(s) = \frac{1}{s+2}$     $C(s) = \frac{s+1}{s-1}$
4.  $P(s) = \frac{1}{s-1}$     $C(s) = \frac{1}{5s-1}$
5.  $P(s) = \frac{s-2}{s(s+3)}$     $C(s) = \frac{3s+1}{s(s-2)}$

**演習問題 11.3.** フィードバック制御系 Fig. 11.3 を考える。制御対象  $P(s)$ 、コントローラ  $C(s)$  が以下で与えられる時、フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる  $k$  の範囲を求めなさい。

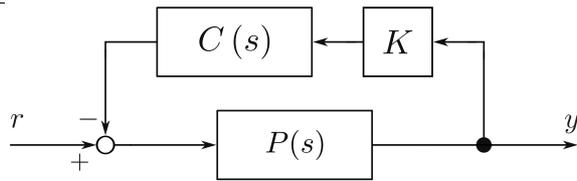
$$P(s) = \frac{2}{s-1} \quad C(s) = \frac{k}{s+2}$$

**演習問題 11.4.** フィードバック制御系 Fig. 11.1 を考える。制御対象  $P$ 、コントローラ  $C$  が以下の状態空間実現で与えられる場合の漸近安定性を判定しなさい。

1.  $\dot{x}_p(t) = x_p(t) + u(t)$     $\dot{x}_c(t) = -x_c(t) + \sqrt{2}e(t)$   
 $z(t) = x_p(t)$     $u(t) = -\sqrt{2}x_c(t) + e(t)$
2.  $\dot{x}_p(t) = -2x_p(t) + u(t)$     $\dot{x}_c(t) = -x_c(t) + \sqrt{2}e(t)$   
 $z(t) = x_p(t)$     $u(t) = \sqrt{2}x_c(t) + e(t)$
3.  $\dot{x}_p(t) = x_p(t) + u(t)$     $\dot{x}_c(t) = 0.2x_c(t) + 0.5e(t)$   
 $z(t) = x_p(t)$     $u(t) = 0.4x_c(t)$

**演習問題 11.5.** フィードバック制御系の安定性について考える。

- (a) (15.1b) (あるいは (15.2)) の四つの伝達関数が安定
- (b)  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実数部が負



$$P(s) = \frac{1}{2s-1}, \quad C(s) = \frac{10}{3s+5}, \quad K = k (= \text{const.})$$

Fig. 11.7: フィードバック制御系

とする. (a)  $\Leftarrow$  (b) は, (15.2) より明らかである. (a)  $\Rightarrow$  (b), つまり (15.1b) の四つの伝達関数が安定ならば,  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  のすべての根の実数部が負である, を示しなさい.

**演習問題 11.6.** Fig. 11.7 の制御系を考える.

1.  $P(s)$  の安定性を判別しなさい. (答 不安定)
2.  $C(s)$  の安定性を判別しなさい. (答 安定)
3.  $r$  から  $y$  までの伝達関数  $G_{yr}(s)$  を求めなさい.
4. 伝達関数  $G_{yr}(s)$  が安定となる  $k$  の範囲を求めなさい. (答  $k > 0.5$ )

## 11.6 演習問題 サンプル解答

**演習問題サンプル解答 11.1.** 1.  $\phi(s) = s^2 + 2s = s(s + 2) = 0$  より, 閉ループ極は  $p_1 = 0 \neq 0, p_2 = -2$ . よって不安定.

2.  $\phi(s) = s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_1 = p_2 = -1$ . よって安定.

3.  $\phi(s) = s^2 + 1 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_{1,2} = \pm j$ .  $\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = 0 \neq 0$  より不安定.

4.  $\phi(s) = s^2 - s + 1 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_{1,2} = (1/2) \pm j(\sqrt{3}/2)$ .  $\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = 1/2 \neq 0$  より不安定.

5.  $\phi(s) = 25(s - 1) + (s + 10)(s - 1)s = (s - 1)(25 + s^2 + 10s) = (s - 1)(s + 5)^2 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_1 = 1 \neq 0, p_2 = p_3 = -5$ . よって不安定.

**演習問題サンプル解答 11.2.** 1.  $\phi(s) = (s - 1)(s + 1) + 1(s - 1) = (s - 1)(s + 1 + 1) = (s - 1)(s + 2) = 0$  より, 閉ループ極は  $p_1 = 1 \neq 0, p_2 = -2$ . よって不安定.

2.  $\phi(s) = (s^2 - 4)(s + 1) + 1(s - 2) = (s - 2)(s + 2)(s + 1) + (s - 2) = (s - 2)((s + 2)(s + 1) + 1) = 0$  より, 閉ループ極に  $p_1 = 2 \neq 0$  が含まれるので不安定.

3.  $\phi(s) = (s + 2)(s - 1) + 1(s + 1) = s^2 + s - 2 + s + 1 = s^2 + 2s - 1 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_1 = -1 + \sqrt{2} \neq 0, p_2 = -1 - \sqrt{2}$ . よって不安定.

4.  $\phi(s) = (s - 1)(5s - 1) + 1 \times 1 = 5s^2 - s - 5s + 1 + 1 = 5s^2 - 6s + 2 = 0$  より, 閉ループ極は  $p_{1,2} = 3/5 \pm j1/6$ .  $\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = 3/5 \neq 0$  より不安定.

5.  $\phi(s) = s(s + 3)s(s - 2) + (s - 2)(3s + 1) = (s - 2)(s^2(s + 3) + (3s + 1)) = 0$  より, 閉ループ極に  $p_1 = 2 \neq 0$  が含まれるので不安定.

**演習問題サンプル解答 11.3.** 特性多項式は  $\phi(s) = (s - 1)(s + 2) + 2k = s^2 + s - 2 + 2k$ .  $\phi(s) = 0$  より, 閉ループ極は  $p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 8k}}{2}$ .

1.  $p_1, p_2$  が複素共役, つまり  $9 - 8k < 0$  の時,  $\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = -1/2$  より安定. したがって  $k > 9/8$  の場合は安定.

2.  $p_1, p_2$  が実数根, つまり  $9 - 8k \geq 0$  より  $k \leq 9/8$  の場合は,  $-1 + \sqrt{9 - 8k} < 0$  より,  $k > 1$  がえられる. したがって  $9/8 \geq k > 1$  の場合は安定.

1, 2 より, フィードバック制御系が安定となる  $k$  の範囲は,  $k > 1$ .

演習問題サンプル解答 11.4. 行列  $A_{cl} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$  とその固有値を求める.

1.

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \times 1 \times 1 & 1 \times (-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2} \times 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

よって固有値は  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \neq 0$  より不安定.

2.

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} -2 - 1 \times 1 \times 1 & 1 \times \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \times 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

よって固有値は  $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$ .  $\text{Re}[\lambda_1] = \text{Re}[\lambda_2] = -2$  より安定.

3.

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \times 0 \times 1 & 1 \times 0.4 \\ -0.5 \times 1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_{cl}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -0.4 \\ 0.5 & \lambda - 0.2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.2) + 0.2 \\ &= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.4 \end{aligned}$$

よって固有値は  $\lambda_{1,2} = 3/5j \pm (1/5)$ .  $\text{Re}[\lambda_1] = \text{Re}[\lambda_2] = 3/5 \neq 0$  より不安定.

演習問題サンプル解答 11.5. (a) であるにも関わらず (b) ではない, つまり (15.1b) の四つの伝達関数が安定であるにも関わらず  $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$  に実数部が非負である根が存在する, と仮定し矛盾を導く.

$\phi(s) = 0$  の実数部が非負である根を  $\bar{p}$  とする. つまり多項式  $\phi(s)$  は

$$\phi(s) = (s - p_1) \cdots (s - \bar{p}) \cdots (s - p_{n_d}) \quad n_d = n_d^p + n_d^c$$

の形式をしている.

$G_{uw}(s)$  は安定なので,  $1 + G_{uw}(s) = D_c(s)D_p(s)/\phi(s)$  も安定である. 四つの伝達関数  $G_{zw}(s), G_{zr}(s), 1 + G_{uw}(s), G_{ur}(s)$  は安定なので, それぞれの分

子多項式は

$$D_c(s)N_p(s) = \cdots (s - \bar{p}) \cdots$$

$$N_c(s)N_p(s) = \cdots (s - \bar{p}) \cdots$$

$$D_c(s)D_p(s) = \cdots (s - \bar{p}) \cdots$$

$$N_c(s)D_p(s) = \cdots (s - \bar{p}) \cdots$$

の形式をしており、分母多項式の  $\phi(s)$  に含まれる  $s - \bar{p}$  の項が消去されていなければならない。つまり

$$D_c(\bar{p})N_p(\bar{p}) = 0 \quad (11.13a)$$

$$N_c(\bar{p})N_p(\bar{p}) = 0 \quad (11.13b)$$

$$D_c(\bar{p})D_p(\bar{p}) = 0 \quad (11.13c)$$

$$N_c(\bar{p})D_p(\bar{p}) = 0 \quad (11.13d)$$

となっている。

$D_p(\bar{p}) = 0$  と仮定すると、 $P(s) = N_p(s)/D_p(s)$  の既約性より  $N_p(\bar{p}) \neq 0$  となる。このとき (11.13a), (11.13b) から、それぞれ  $D_c(\bar{p}) = 0$ ,  $N_c(\bar{p}) = 0$  がえられる。これは  $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$  の既約性に反する。したがって  $D_p(\bar{p}) \neq 0$  である。

そこで  $D_c(\bar{p}) = 0$  と仮定する。このとき  $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$  の既約性より  $N_c(\bar{p}) \neq 0$  である。(11.13b), (11.13d) から、それぞれ  $N_p(\bar{p}) = 0$ ,  $D_p(\bar{p}) = 0$  がえられる。これは  $P(s) = N_p(s)/D_p(s)$  の既約性に反する。したがって  $D_c(\bar{p}) \neq 0$  である。

しかしながら  $D_p(\bar{p}) \neq 0$  かつ  $D_c(\bar{p}) \neq 0$  は、(11.13c) に反する。したがって (11.13) の状況は生じない。つまり最初の仮定が誤っている。よって (a)  $\Rightarrow$  (b) である。

**演習問題サンプル解答 11.6.** 1.  $2s - 1 = 0$  より、極は  $p_1 = 1/2 \neq 0$ 。よって不安定。

2.  $3s + 5 = 0$  より、極は  $p_1 = -5/3$ 。よって安定。

3.  $y = P(r - kCy)$  より、 $y = P/(1 + kPC)$ 。よって

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{1}{1 + k \frac{1}{2s-1} \frac{10}{3s+5}} = \frac{3s+5}{(2s-1)(3s+5) + 10k} \\ &= \frac{3s+5}{6s^2 + 7s - 5 + 10k} \end{aligned}$$

4.  $6s^2 + 7s + 5(2k - 1) = 0$  より、極は

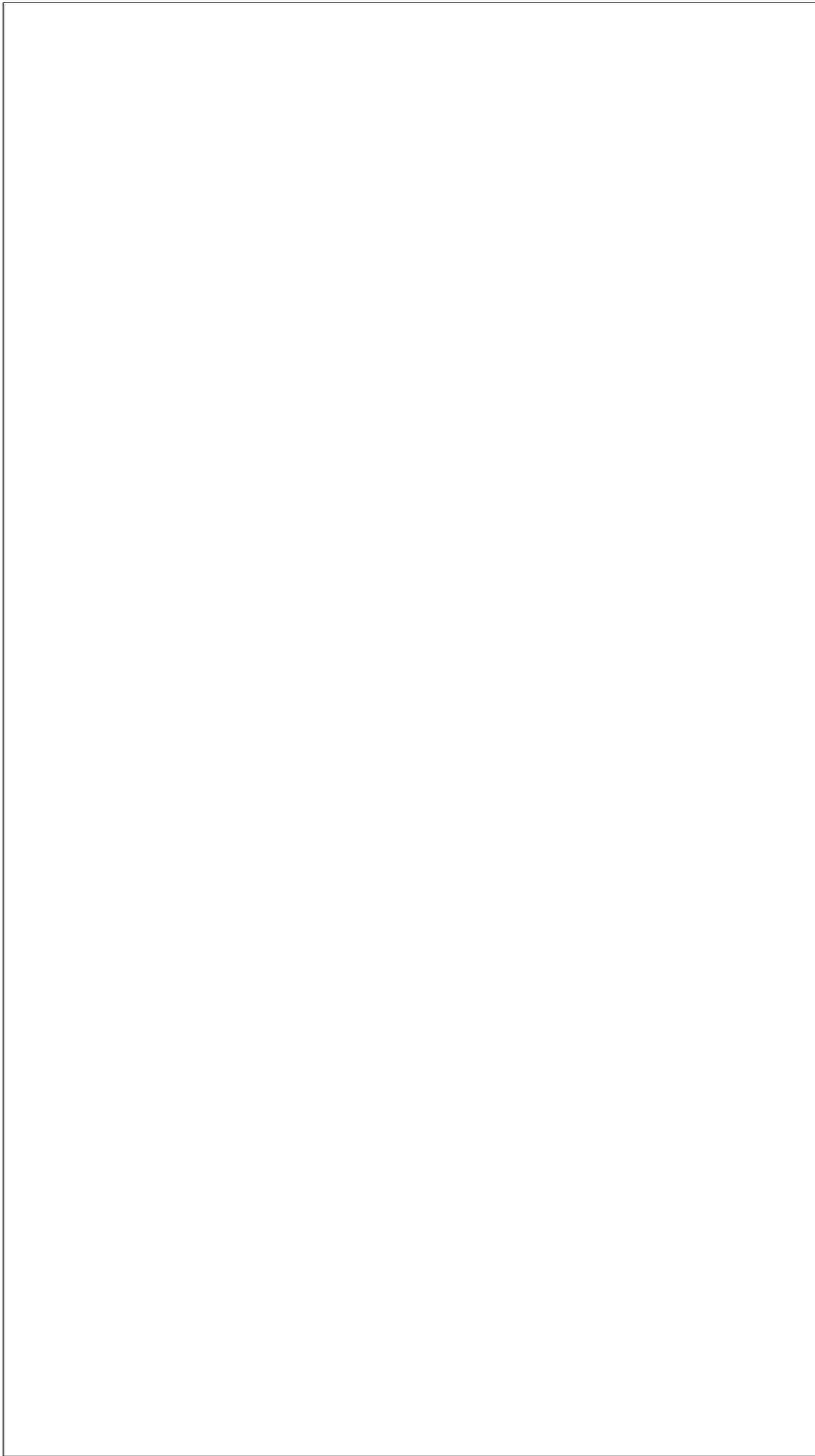
$$p_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 120(2k - 1)}}{12}$$

- (a)  $p_1, p_2$  が複素共役, つまり  $49 - 120(2k - 1) < 0$  の時,  $\operatorname{Re}[p_1] = \operatorname{Re}[p_2] = -7/12$  より安定. したがって  $\sqrt{49 - 120(2k - 1)} < 0$  より,  $k > 169/240 \approx 0.70$  の場合は安定.
- (b)  $p_1, p_2$  が実数根, つまり  $49 - 120(2k - 1) \geq 0$  より  $k \leq 169/240 \approx 0.70$  の場合は,  $-7 + \sqrt{49 - 120(2k - 1)} < 0$  より,  $k > 1/2$  がえられる. したがって  $169/240 \geq k > 1/2$  の場合は安定.

4a, 4b より, 伝達関数  $G_{yr}(s)$  が安定となる  $k$  の範囲は,  $k > 1/2$ .

---

---



---

# 第12章 状態フィードバックによる安定化

はじめに

—— 第12章のポイント ——

- 状態フィードバックによる安定化

## 12.1 状態フィードバックによる安定化

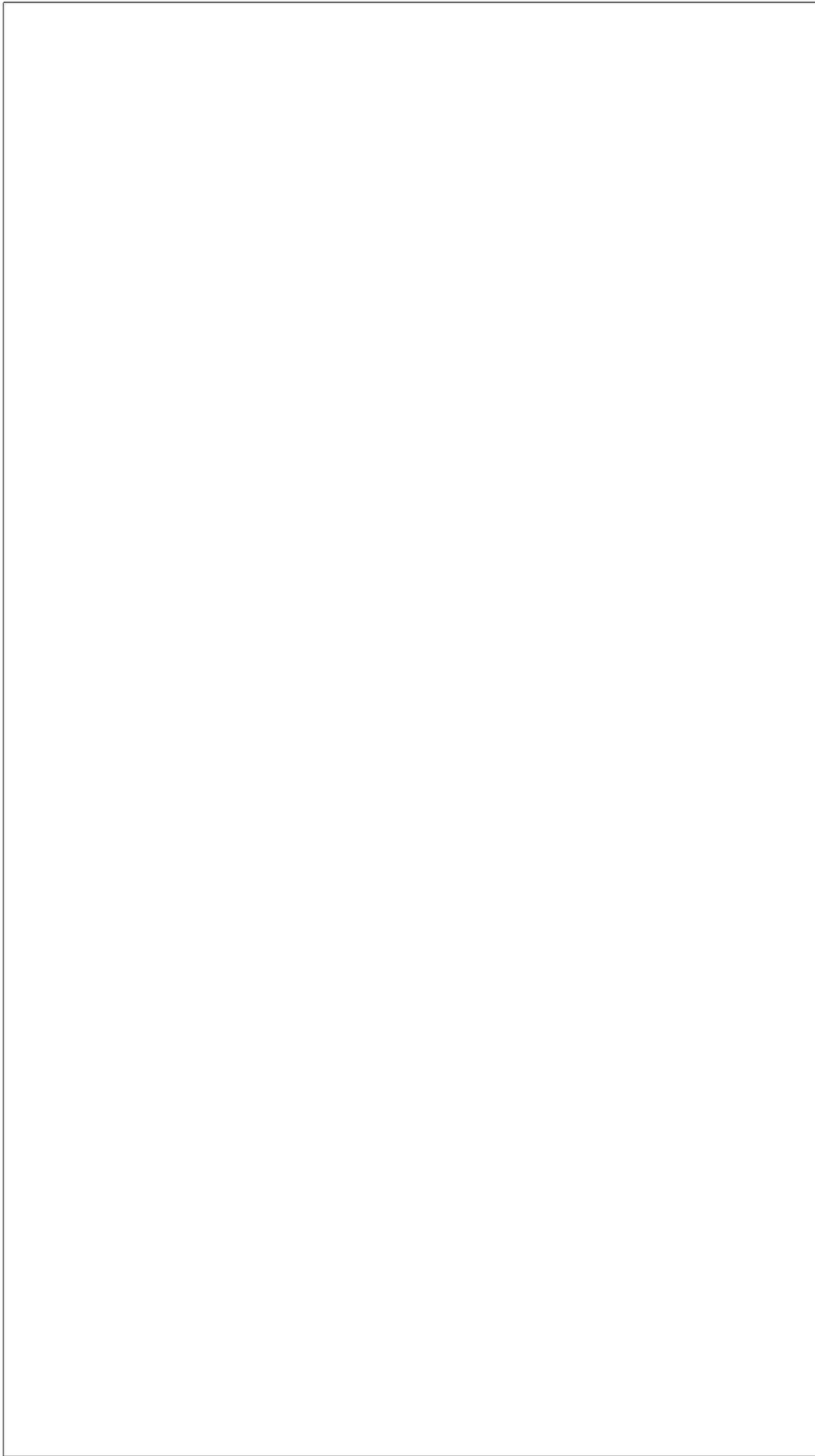
## 12.2 演習問題

演習問題 12.1.

## 12.3 演習問題 サンプル解答

---

---



---

## 第13章 ナイキストの安定判別法

11.2 節では、フィードバック制御系の安定性を考え、フィードバック制御系の安定性には、(15.1b) の四つの伝達関数すべてが安定でなければならないことを確認した。また 7.4 節では、単一の伝達関数が安定であるには、その「分母多項式」= 0 の根、つまり伝達関数の極の実数部がすべて負でなければならないことを確認した。したがって、四つの伝達関数それぞれの分母多項式を求め安定性を個々に確認することで、フィードバック制御系の安定性を判別することはできる。さらに 11.3 節で確認したように、特性多項式  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  を考えれば、「特性多項式」= 0 の根を考えることで、四つの伝達関数の安定性、つまりフィードバック制御系の安定性を、一度に判定することもできる。さらにここでは、ナイキストの安定判別法をとおして、フィードバック制御系の安定性を再度考える。ナイキストの安定判別法は、安定か、不安定かの問いに答えるだけでなく、「安定の度合い」を計る尺度を与えてくれる点で重要である。

### 第13章のポイント

- ナイキストの安定判別法を理解しよう。
- ゲイン余裕、位相余裕を理解し、読み取れるようになろう。

### 13.1 フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

この章で目指すゴールを、例題により少し詳しく説明することから始めよう。5.7 節などで、これまでも詳しく調べた 2 次系の伝達関数  $P(s)$  であらわされる制御対象に積分器  $C(s) = k \times (1/s)$  をコントローラとして適用した Fig. 13.1(a) のフィードバック制御系を考える。

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5)$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad (k = 1, 3, 9)$$

目標値  $r$  から、出力  $z$  までの伝達関数  $G_{zr}(s)$  は、(15.1b) より、

$$G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{k}{s}}{1 + \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{k}{s}} = \frac{kK\omega_n^2}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + k\omega_n^2}$$

となる。

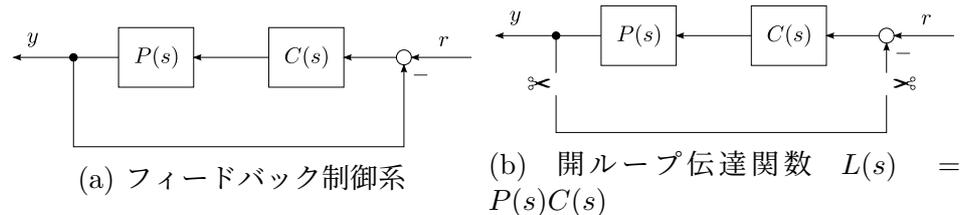


Fig. 13.1: フィードバック制御系と開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$

コントローラ  $C(s)$  の積分ゲインを  $k = 1$  とした場合に、 $G_{zr}(s)$  の「分母多項式」= 0 の根 (伝達関数の極) を数値計算により求めると  $-1.1, -4.4 \pm 8.4j$  となる。極の実部はすべて負であり、 $G_{zr}(s)$  は安定な伝達関数になっている。 $G_{zr}(s)$  ステップ応答は、Fig. 13.2(a) のようになる。

ここで、Fig. 13.1(b) に示すように、フィードバックループを切り離れた時の伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のボード線図を Fig. 13.3(a) に示しておく。 $L(s)$  は (フィードバックループを切り離れたときの伝達関数なので) **開ループ伝達関数** や **開ループ特性** と呼ばれるが、詳細はあとの 13.2 節以降で考える。ここでは、 $L(s) = P(s)C(s)$  のボード線図が、Fig. 13.3 に示すようなものになるのだ、と単純に見ておいてもらえれば十分である。

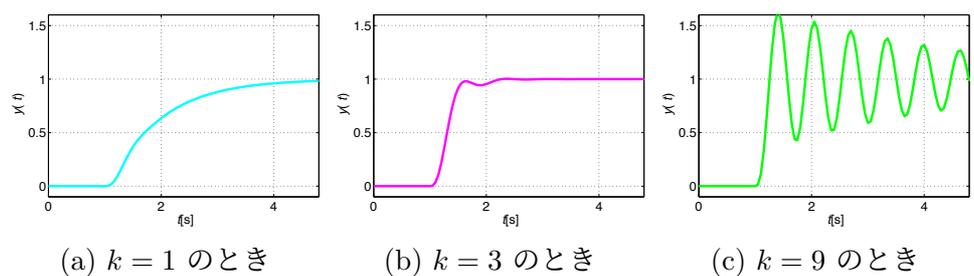


Fig. 13.2:  $G_{zr}(s)$  のステップ応答

$k = 3$  とし、 $G_{zr}(s)$  の極を同様に求めると  $-3.9, -3.0 \pm 8.2j$  となり、この場合も  $G_{zr}(s)$  は安定である。 $G_{zr}(s)$  ステップ応答、 $L(s)$  のボード線図は、それぞれ Fig. 13.2(b) と Fig. 13.3(b) となる。 $k = 1, k = 3$  の場合共に、安定な伝達関数  $G_{zr}(s)$  がえられてはいるが、それぞれのステップ応答 Fig. 13.2(a) と Fig. 13.2(b) を比較すると、 $k = 3$  とした場合の方が目標値への収束が早く、‘制御の性能’が良いな、と感じる<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>応答の早さ、などについては、14 章で詳しく考える。

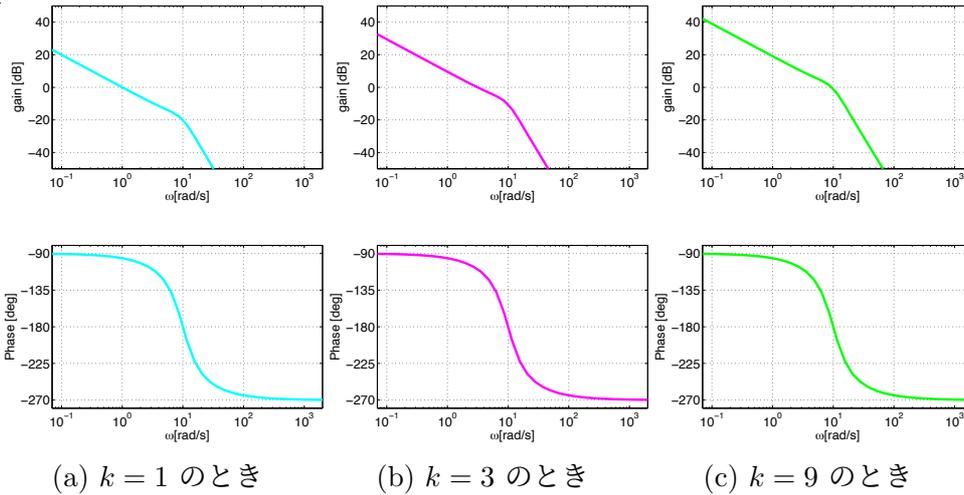


Fig. 13.3: 開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のボード線図

最後に  $k = 9$  の場合を考える. このときも  $G_{zr}(s)$  の極は  $-9.5, -0.26 \pm 9.7j$  となり, やはり  $G_{zr}(s)$  は安定である. しかしながら  $G_{zr}(s)$  のステップ応答は Fig. 13.2(c) となり, 極めて振動的である. 仮にこの例がロボットアームの制御系設計を考えていたとすると<sup>2</sup>, こんな風に腕を振り回しているロボットアームの側には怖くて近づけないだろう. いくら  $G_{zr}(s)$  が安定な伝達関数になっているとはいえ, この挙動で十分だと感じる制御技術者は, いないはずである.

伝達関数の極を求めれば, 安定か, 不安定かという問いには答えることができる. しかしながら安定なだけでは, 例えば Fig. 13.2(c) の応答のように, 実用に耐えない挙動が発生する場合もある. 安定か, 不安定かの問いに答えるだけでなく, ‘十分に余裕をもって安定か’ といった問いに答えられることが, 実用に耐えうる制御系の設計には重要になる.

じつは, この章でこれから考える内容がすでに理解できている制御技術者ならば, Fig. 13.3(a) や Fig. 13.3(b) のボード線図を見ただけで, 実用に耐えられる安定性があるな, と判定できる. また逆に Fig. 13.3(c) の場合は, これを見た瞬間に, 実用的には使い物にならないな, と判定できる. この章では, このような安定判別の技術を身につけよう.

### 13.2 ナイキストの安定判別法: 準備

4つの伝達関数 (15.1b) の分母には,  $1 + P(s)C(s)$  が共通にあらわれる. ナイキストの安定判別法の説明を, この  $1 + P(s)C(s)$  を4つの多項式  $N_p(s), D_p(s), N_c(s), D_c(s)$  を使ってあらわすことから始めよう.

$$1 + P(s)C(s) = 1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \quad (13.1)$$

<sup>2</sup>実際この例で考えている伝達関数  $P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  は, 適当な仮定のもとで, ロボットアームの特性をあらわすことができる.

$1 + P(s)C(s)$  の分子は、特性多項式  $\phi(s) = N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)$  そのものになる。一方、分母の  $D_p(s)D_c(s)$  は、Fig. 13.1(b) のように、フィードバックループを開いた時の特性をあらわす開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  を  $\frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$  とあらわした時の分母になっている。そこで  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根を、**開ループ極** と呼ぶことにする<sup>3</sup>。開ループ極のうち、実部が負のものを安定、そうではないものを不安定と呼ぶことも、閉ループ教の場合と同じである。

**例題 13.1.** 例題 11.6 の  $P(s)$  と  $C(s)$  をもう一度考える。  $P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)}$  と  $C(s) = \frac{1}{s}$  の時は、  $D_p(s)D_c(s) = (s+0.1)(s+1) \times s$  であり、開ループ極は  $-1, -0.1, 0$  となる。 □

**例題 13.2.** 例題 11.7 の  $P(s) = \frac{1}{s-1}$  と  $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$  の場合は、  $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$  より  $-1, 1$  が開ループ極となる。 □

安定判別の目的の一つは、フィードバック制御系が内部安定かどうか、つまり不安定な開ループ極があるかどうか、あるとすればその個数  $Z$  を知りたいということである<sup>4</sup>。

一方、制御系の特性を調べる、あるいはコントローラ  $C(s)$  を設計するにあたっては、2章でも考えたように、制御対象の特性をよく調べ、これを表現する数学モデル  $P(s)$  を導き出す。したがって制御技術者は、伝達関数  $P(s)$ 、つまり多項式  $N_p(s), D_p(s)$  をよく知っている。また  $C(s)$  は、制御技術者が設計した、あるいはこれから設計するものであり、これもまた当然よく知っている。つまり制御技術者は、多項式  $D_p(s)D_c(s)$  の具体的な形も、したがって開ループ極に含まれる不安定極の数  $P$  もよく知っている<sup>5</sup>。

まとめると、制御技術者の置かれた状況は、

知りたい： 開ループ極のうち、不安定なものの個数  $Z$

知っている： 開ループ極のうち、不安定なものの個数  $P$

となる。ナイキストの安定判別法は、不安定な開ループ極の個数  $P$  を知ったうえで、不安定な開ループ極の個数  $Z$  を知る方法である。また 13.1 節で指摘したように、安定 (つまり  $Z = 0$ ) か、不安定 (つまり  $Z \geq 1$ ) か、への回答だけでなく、13.5.1 節で考えるように、‘安定の度合い’ を計る尺度を与えることもできる。

<sup>3</sup>極零相殺がない場合には、開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  の極と  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根 (開ループ極) が一致する。

<sup>4</sup>(13.1) の分子を零 (zero) にする点なので  $Z$  であらわすことにする

<sup>5</sup>(13.1) の分母が零になる極 (pole) を考えているので、 $P(s)$  と混同しそうで紛らわしいかも知れないがあえて、 $P$  であらわすことにする。

## 13.3 ナイキストの安定判別法: 導出

ここでは、ナイキストの安定判別法の導出を考える<sup>6</sup>。(13.1)式の分子、分母の多項式を

$$\begin{aligned} 1 + P(s)C(s) &= \frac{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \\ &= \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (n = n_d^p + n_d^c) \end{aligned}$$

のように因数分解して表現したところから始めよう<sup>7</sup>。つまり

$$\text{閉ループ極: } z_1, \dots, z_n \quad \text{開ループ極: } p_1, \dots, p_n$$

であり、 $p_1, \dots, p_n$ のうち不安定なもの個数  $P$  を知っており、 $z_1, \dots, z_n$ の中で不安定なもの個数  $Z$  を知ることが目的である。

### 13.3.1 偏角の原理

ここでは、ナイキストの安定判別法を説明してくれる、偏角の原理と呼ばれる複素関数の性質を考えよう。 $F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s)$ とする。

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

$F(s)$ の極  $p_1, \dots, p_n$  と零点  $z_1, \dots, z_n$  は、例えば  $s$  平面上では Fig. 13.4(a)のように分布しているとする。

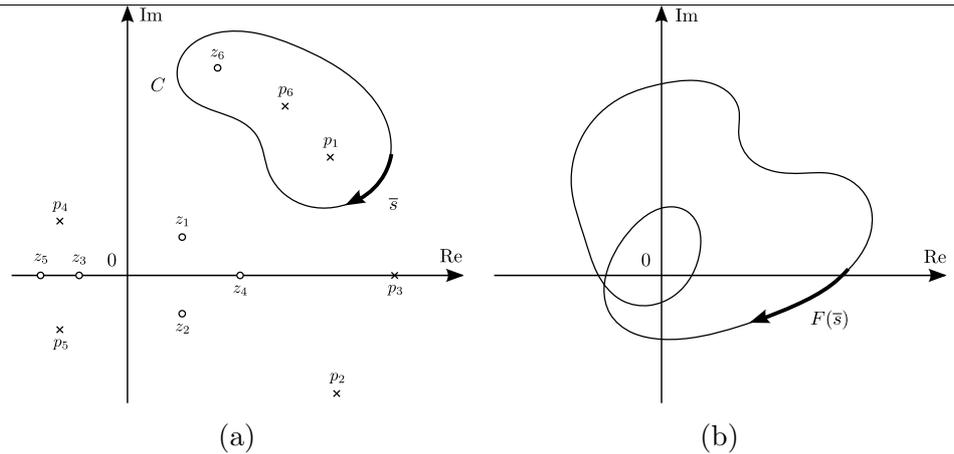
$s$  平面上に、Fig. 13.4(a)に示す適当な閉曲線  $C$  を考えよう<sup>8</sup>。さらにこの閉曲線  $C$  上を時計回りに1周する変数  $\bar{s}$  を考える。ここでは、変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を時計回りに1周する際、Fig. 13.4(b)に示す、 $F(\bar{s})$ がどのような軌跡を描くのか、特に  $F(\bar{s})$ が原点の周りを何周するのか、つまり  $F(\bar{s})$ の偏角  $\angle F(\bar{s})$  がどれだけ変化するのかを調べよう。

まずはじめに簡単な場合を考える。Fig. 13.5に示すとおり、閉曲線  $C$  で囲まれる領域に1つの零点  $z_1$ だけが含まれていたとしよう。Fig. 13.5で変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を時計回りに一周する様子を考えれば分かるように、 $\angle(\bar{s} - z_1)$ の総変化量は  $-360$  [deg]、つまり時計回りに1回転となる。一方、閉曲線  $C$  で囲まれる領域の外側にある零点  $z_k$  や極  $p_k$  についての偏角  $\angle(\bar{s} - z_k)$  や

<sup>6</sup>まずはナイキストの安定判別法の使い方を知りたい、という場合は、この節を省略してつぎの13.4節に進んでも問題ない。ナイキストの安定判別法が使いこなせるようになったら、この章に戻って、ぜひその導出過程も理解してもらいたい。

<sup>7</sup>念の為(11.1e), (11.1f), (11.4e), (11.4f)に合わせた補足をしておくと、 $D_p(s)D_c(s) = (s - p_1^p) \cdots (s - p_{n_p}^p) \times (s - p_1^c) \cdots (s - p_{n_c}^c) = (s - p_1) \cdots (s - p_n)$ と置いただけであり、 $N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = b_{n_p}^p(s - z_1^p) \cdots (s - z_{n_p}^p) \times b_{n_c}^c(s - z_1^c) \cdots (s - z_{n_c}^c) + (s - p_1^p) \cdots (s - p_{n_p}^p) \times (s - p_1^c) \cdots (s - p_{n_c}^c)$ を改めて因数分解したものを  $(s - z_1) \cdots (s - z_n)$ と置いている。

<sup>8</sup>ここでは、閉曲線  $C$  が極  $p_1, \dots, p_n$  や零点  $z_1, \dots, z_n$  の上を通過していることはないとする。

Fig. 13.4: 閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する変数  $\bar{s}$  とその時の像

$\angle(\bar{s} - p_k)$  は、変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  を 1 周する際に上下動はするものの、その正味の変化量は  $0$  [deg] である。  $F(\bar{s})$  の偏角  $\angle F(\bar{s})$  は、

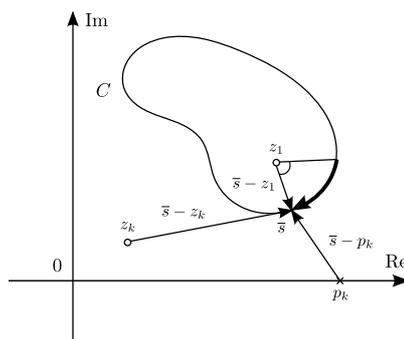
$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots - \angle(s - p_n) \quad (13.2)$$

であるから、 $\angle F(\bar{s})$  の総変化量は、 $\angle(\bar{s} - z_1)$  の総変化量に等しく  $-360$  [deg] となる。つまり

閉曲線  $C$  が零点を 1 つのみ囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに 1 回転

となることがわかる。

Fig. 13.5:  $\angle(\bar{s} - z_1)$  の総変化量は  $-360$  [deg]

今度は、閉曲線  $C$  で囲まれる領域の内部に  $Z$  個の零点のみが含まれている場合を考えよう。この場合も Fig. 13.5 で考えたのと同じように、閉曲線  $C$  で囲まれる領域の内部にある  $z_1, \dots, z_Z$  についての偏角  $\angle(\bar{s} - z_1), \dots, \angle(\bar{s} - z_Z)$  の総変化量は、それぞれ  $-360$  [deg] である。(13.2) より、これらの和が  $\angle F(\bar{s})$

の総変化量となるから、

閉曲線  $C$  が零点を  $Z$  個のみ囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $Z$  回転

となることがわかる。

それでは、閉曲線  $C$  で囲まれる境域に 1 つの極  $p_1$  だけが含まれている場合はどうであろうか。Fig. 13.5 の  $z_1$  を  $p_1$  で置き換えてみればわかるように、この場合も  $\angle(\bar{s} - p_1)$  の総変化量は  $-360$  [deg] である。このとき (13.2) から、 $\angle F(\bar{s})$  の総変化量は  $-\angle(\bar{s} - p_1)$  の総変化量であり、 $360$  [deg] となる。つまり反時計回りに 1 回転であり、

閉曲線  $C$  が極を 1 つのみ囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $-1$  回転

となる。ここでは、時計回りの回転数を正の数で、反時計回りの回転数を負の数で数えることにする。

一般に閉曲線  $C$  が  $Z$  個の零点と  $P$  個の極を囲んでいたとすると、これまでの考察からわかるように

閉曲線  $C$  が零点を  $Z$  個、極を  $P$  個囲んでいる  $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $Z - P$  回転

となる。この複素関数の性質を利用して、つぎにナイキストの安定判別法を導出しよう。

### 13.3.2 ナイキストの安定判別法

ここでは簡単のため、開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  は、 $s = 0$  や  $s = \pm j\omega_n$  といった、虚軸上の極をもたないと仮定する。前節と同様に  $F(s) = 1 + L(s)$  とする。 $F(s)$  の零点  $z_1, \dots, z_n$  (閉ループ極) のうち不安定な  $Z$  個と極  $p_1, \dots, p_n$  (開ループ極) のうち不安定な  $P$  個が、右半平面に存在している。閉曲線  $C$  として、ここでは Fig. 13.6(a) に示す閉曲線を考えよう。閉曲線  $C$  は、虚軸上を通る直線と半円の外周になっている。ただしここで閉曲線  $C$  の半径  $R$  は、その大きさをいくらでも大きくした  $R \rightarrow \infty$  の極限を考える。つまり閉曲線  $C$  は  $s$  平面の右側半分をすべて囲んでいる。したがって、 $F(s) = 1 + L(s)$  の  $P$  個の不安定極と  $Z$  個の不安定零点は、すべて閉曲線  $C$  で囲まれる領域に含まれている。

変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する時の像  $F(\bar{s})$  を考えよう。前節で考えた複素関数の性質と閉曲線  $C$  で囲まれる領域の内部には  $P$  個の不安定極と  $Z$  個の不安定零点が含まれていることから、まず

$F(\bar{s})$  は原点を時計回りに  $Z - P$  回転

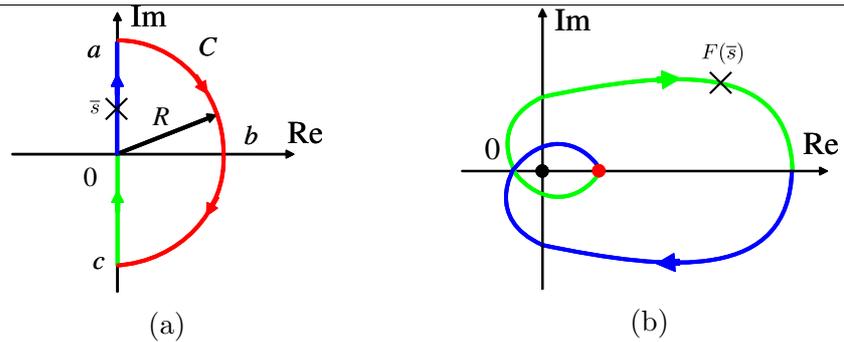


Fig. 13.6: 右反平面を覆う閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する変数  $\bar{s}$  とその時の像  $F(\bar{s})$

となることがわかる. さらに  $F(s) = 1 + L(s)$  であったから, 変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する時の  $L(\bar{s})$  の軌跡を考えると, これは  $F(\bar{s})$  を 1 ずらしただけあり,

$$L(\bar{s}) \text{ は点 } -1 + j0 \text{ を時計回りに } Z - P \text{ 回転} \quad (13.3)$$

となることもわかる.

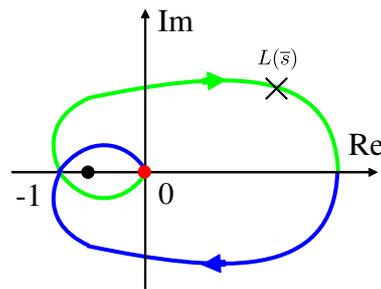


Fig. 13.7: 変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を時計回りに 1 周する時の像  $L(\bar{s})$

Fig. 13.7 の軌跡  $L(\bar{s})$  についてももう少し詳しく見てみよう. 変数  $\bar{s}$  が閉曲線  $C$  上を原点から点  $a$  へ向かって進むとする. この時  $\bar{s} = j\omega$  で  $\omega$  は  $0 \rightarrow \infty$  と変化する. したがって  $L(\bar{s}) = L(j\omega)$  であり, これは  $L(s)$  のベクトル軌跡そのものである. つぎに変数  $\bar{s}$  は点  $a$  から点  $b$  を経由して点  $c$  へと進む. このとき  $L(s)$  は厳密にプロパーな伝達関数であり, また  $R \rightarrow \infty$  の極限を考えていることから, この間ずっと  $L(\bar{s}) = 0$  となる. 最後に変数  $\bar{s}$  は, 点  $c$  から原点へと進むので,  $\bar{s} = -j\omega$ ,  $\omega = \infty \rightarrow 0$  である. この時  $L(-j\omega) = \overline{L(j\omega)}$  であることに注意すると,  $L(-j\omega)$  の軌跡は  $L(s)$  のベクトル軌跡を実軸対称に描くだけでえられる.

Fig. 13.7 に示す  $L(\bar{s})$  の軌跡は, 基本的には  $L(s)$  のベクトル軌跡を描くだけでえられることがわかった.  $L(\bar{s})$  の軌跡は, ナイキスト軌跡と呼ばれる. それでは実際にナイキスト軌跡を描いたとして, これが点  $-1 + j0$  を時計回りに回転する数を数えよう. この回転数を  $N$  とすると, (13.3) より,  $N = Z - P$  となる.  $P$  は不安定な開ループ極の数であり, すでに制御技術者が知っている値であった.  $N$  はナイキスト軌跡を描いて実際に数えればよい. これによ

り,  $Z = N + P$  つまり不安定な閉ループ極の数がわかる. このようにして  $Z$  の値を求める手順をナイキストの安定判別法と言う.

最後にこの節の内容について補足を述べておく. ここでは, 開ループ伝達関数  $L(s)$  が虚軸上に極をもたないと仮定した. 虚軸上の  $s = 0$  や  $s = \pm j\omega_n$  などが開ループ極として存在すると, Fig. 13.6(a) の原点から  $a$  へ  $\omega$  が移動する時に, 極の部分で  $L(j\omega)$  の軌跡がちぎれてしまう. よって閉じたナイキスト軌跡が描けず, 点  $-1 + j0$  を回る回数を考えることができない. 虚軸上に極がある場合は, Fig. 13.6(a) の閉曲線を少し修正して, ナイキストの安定判別法を適用する必要がある. 具体的な修正の手順は, 参考図書<sup>9</sup>などで説明されている. なお, 開ループ伝達関数  $L(s)$  に  $s = 0$  の極が一つだけあり, 残りはすべて安定極になっている場合は, 13.5 節の簡略化されたナイキストの安定判別法を使うことができる.

## 13.4 ナイキストの安定判別法: 使い方

ここでは, ナイキストの安定判別法の使い方を説明する. ナイキストの安定判別法の手順は, つぎのようにまとめることができる. ただしここでは, 開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  が, 虚軸上に極をもたないとする<sup>10</sup>.

### ナイキストの安定判別法

**手順 1**  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根 (開ループ極) のうち, 不安定なもの個数  $P$  を数える.

**手順 2** 開ループ伝達関数のベクトル軌跡  $L(j\omega)$ ,  $\omega$  は 0 から  $\infty$  の範囲, を描く<sup>11</sup>.

**手順 3** 手順 2 での軌跡と実軸対象な軌跡を描き  $L(j\omega)$ ,  $\omega$  は  $-\infty$  から 0 の範囲, をえる<sup>12</sup>. これでナイキスト軌跡が描かれた.

**手順 4** ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  の周りを時計回りに回転する回数  $N$  を数える. ただし, 反時計回りの回転は負の数として数える.

**手順 5**  $N = Z - P$  であり, フィードバック制御系は  $Z$  個の不安定極をもつ.  $Z = 0$  ならばフィードバック制御系は内部安定である.

ナイキストの安定判別法をいくつかの例に適用し, その安定判別の手順を理解しよう.

<sup>9</sup>杉江, 藤田, フィードバック制御入門, コロナ社, 1999., 吉川, 古典制御論, 昭晃堂, 2004.

<sup>10</sup>開ループ伝達関数  $L(s)$  が虚軸上に極を持つ場合については, 13.3.2 節末の補足を参照のこと.

<sup>11</sup>実際には, 十分大きな  $\omega_h$  を選んで 0 から  $\omega_h$  の範囲で描けば十分である.  $L(s)$  は厳密にプロパーであるから (なぜでしょう),  $\omega_h$  を十分に大きくすると  $L(j\omega_h) \rightarrow 0$  となる.

<sup>12</sup> $L(j(-\omega))$  は,  $L(j\omega)$  の共役複素数になる, つまり  $L(-j\omega) = \overline{L(j\omega)}$  (理由を考えてみよう). したがって,  $L(j\omega)$ ,  $\omega > 0$  の軌跡を実軸対象にひっくり返せば,  $L(j\omega)$ ,  $\omega < 0$  の軌跡が描かれる.

**例題 13.3.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s+1}$  とコントローラ  $C(s) = 1$  からなるフィードバック制御系を考える。  $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$  より、不安定な開ループ極はなく  $P = 0$  である。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$  のベクトル軌跡は、Fig. 13.8 の実線のようにえられる。これを実軸に関して反転させた Fig. 13.8 の破線を描き、ナイキスト軌跡がえられる。

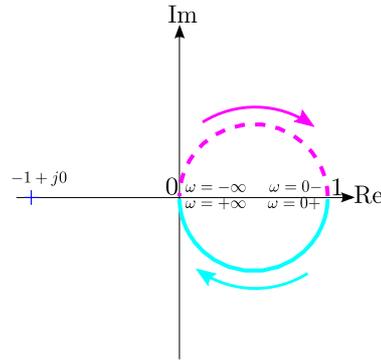


Fig. 13.8:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1}$  のナイキスト軌跡

ナイキスト軌跡が点  $-1+j0$  を回る回数は  $N = 0$  であり、 $N = Z - P$  より  $Z = 0$ 、すなわち不安定な閉ループ極はないことが分かる。したがってフィードバック制御系は内部安定である。□

**matlab note 13.1** (nyquist). コマンド `nyquist( sys )` により、システム `sys` のナイキスト軌跡が確認できる。例えば、例題 13.3 のナイキスト軌跡 Fig. 13.8 は

```
1: sys_p = tf( [ 1 ], [ 1 1 ] ); sys_c = 1;
2: sys_l = sys_p * sys_c;
3: nyquist( sys_l )
```

のように確認できる。□

**例題 13.4.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$  とコントローラ  $C(s) = \frac{k}{s+0.1}$  からなるフィードバック制御系を考える。  $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$  より、不安定な開ループ極はなく  $P = 0$  である。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$  のナイキスト軌跡を  $k = 1, 2, 4, 3$  のそれぞれの場合について Fig. 13.9 に示す。また Fig. 13.10 は、Fig. 13.9 を点  $-1+j0$  付近で拡大したものである。

$k = 1$  の場合、Figs. 13.9(a), 13.10(a) より、ナイキスト軌跡が点  $-1+j0$  を回る回数は  $N = 0$  である。したがって  $N = Z - P$  より  $Z = 0$  がえられ、フィードバック制御系は内部安定である。この時 Fig. 13.1(a) の目標値  $r(t)$

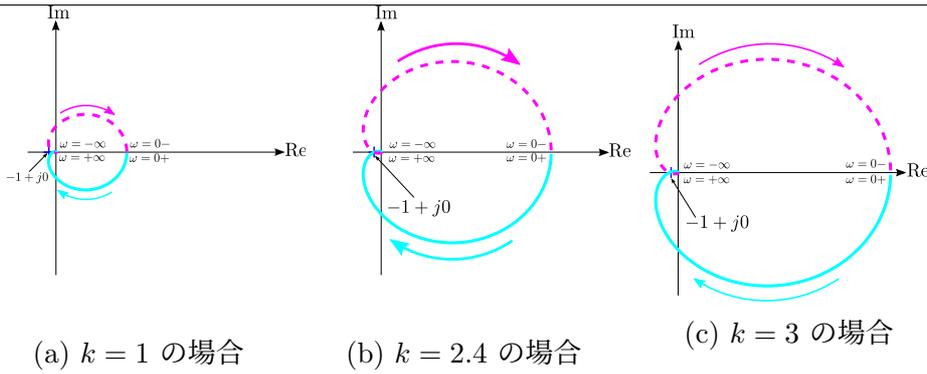


Fig. 13.9:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{k}{(s + 0.1)(s + 1)^2}$  のナイキスト軌跡

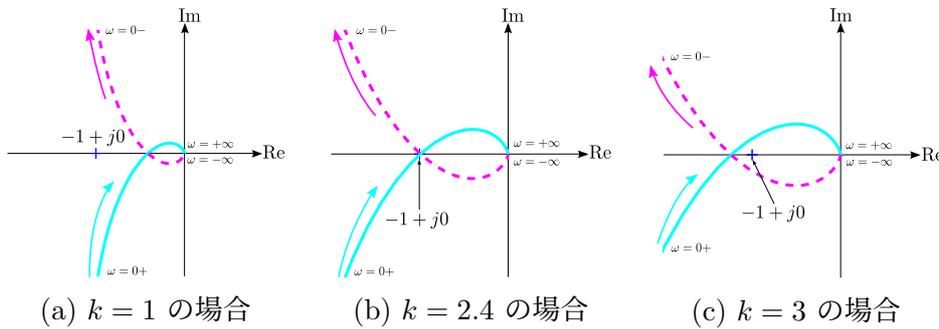


Fig. 13.10:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{k}{(s + 0.1)(s + 1)^2}$  のナイキスト軌跡拡大図

から出力  $y(t)$  までの伝達関数  $G_{yr}(s)$  はもちろん安定となり, ステップ応答は Fig. 13.11(a) に示すように速やかに収束する.

$k = 3$  の場合は, Figs. 13.9(c) 13.10(c) より,  $\omega$  が  $0$  から  $+\infty$  の範囲でナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を時計回りに  $1$  回転している. 同様に  $\omega$  が  $-\infty$  から  $0$  の範囲でも  $1$  回転するので, 合計  $2$  回転となる. よって  $N = 2, P = 0$  より  $Z = 2$  となり, フィードバック制御系は不安定極を  $2$  つ持つことがわかる. フィードバック制御系が不安定である様子は, Fig. 13.11(c) のステップ応答からもよく分かる.

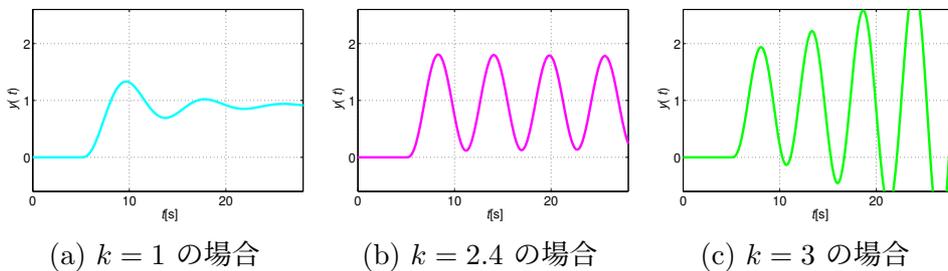


Fig. 13.11:  $G_{yr}(s)$  のステップ応答

最後に  $k = 2.4$  の場合は, ナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を回るか回らないかの境目付近になっていることから, いわば安定限界と呼べるような状況になっていることがわかる. 対応する Fig. 13.11(b) では, 振動の続く実用的で

はないステップ応答を確認できる。 □

**例題 13.5.** 例題 11.7, 13.2 の  $P(s) = \frac{1}{s-1}$  と  $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$  を考える. 不安定な開ループ極の数は, 例題 13.2 より,  $P = 1$  である. 開ループ伝達関数は,  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$  であるから, ナイキスト軌跡は例題 13.3 の Fig. 13.8 と一致する. したがって  $N = 0$  である.  $N = Z - P$  より  $Z = 1$  であり, 不安定な閉ループ極が 1 つ存在し, フィードバック制御系は内部安定ではない. これは, 例題 11.7 の特性多項式の根を求めた結果ともちろん一致する. □

### 13.5 簡略化されたナイキストの安定判別法

制御技術者が取り扱うことになる実際の制御問題では, 安定な制御対象に安定なコントローラを適用する場合が非常に多い<sup>13</sup>. この場合, 不安定な開ループ極が存在せず  $N = 0$  となり, これから説明する簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる.

また, 制御対象  $P(s)$  が積分特性  $\frac{1}{s}$  を含む, あるいはコントローラ  $C(s)$  に積分器を含めることが, 実際の制御系設計では頻繁に起こる. 開ループ極に, 積分器に対応する  $s = 0$  の極が 1 つだけ含まれ, 他はすべて安定極となっている場合にも, 簡略化されたナイキストの安定判別法は適用可能である.

さらに簡略化されたナイキストの安定判別法は, 位相余裕, ゲイン余裕という ‘安定の度合い’ を計る指標を与えてくれる点でも重要である.

開ループ極がすべて安定, あるいは  $s = 0$  の極を一つだけもち残りはすべて安定な場合を考える. これまでに見てきた例では, 例 13.3, 13.4 が, この条件を満たしている. これらの例で示した Figs. 13.8, 13.10 のナイキスト軌跡をもう一度確認すると,  $\omega$  を 0 から  $\infty$  へ変化させた時のベクトル軌跡が, 点  $-1 + j0$  を常に左手に見ながら原点へ至れば<sup>14</sup>, 点  $-1 + j0$  の周りを回ることではない. よってこの場合, フィードバック制御系は内部安定となる. 逆に点  $-1 + j0$  を右手に眺めることがあれば (たとえば例 13.4 の Fig. 13.10(c) の場合), 回転が生じるので, 不安定極が存在する. この状況は Fig. 13.12 に要約される.

Fig. 13.12 で説明される状況を, 簡略化されたナイキストの安定判別法としてまとめる.

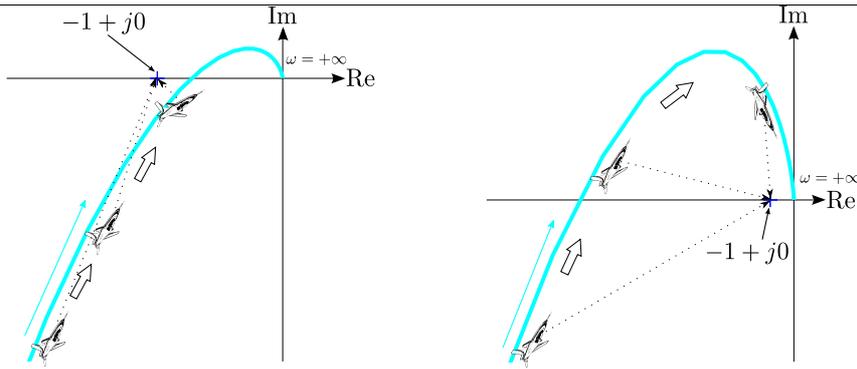
#### 簡略化されたナイキストの安定判別法

**手順 1**  $D_p(s)D_c(s) = 0$  の根 (開ループ極) に不安定なものがないこと, あるいは  $s = 0$  の極が 1 つだけで, 他はすべて安定極であることを確認する.

**手順 2** 開ループ伝達関数のベクトル軌跡  $L(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$  を描く.

<sup>13</sup>この場合でも, フィードバック制御系が安定になることは保証されない. したがって安定性の評価はもちろん必要である.

<sup>14</sup>ベクトル軌跡の上を歩いている気分になって, 点  $-1 + j0$  を眺めてみよう.



(a) 常に左手に見ているので **安定** (b) 右手に見ることがあるので **不安定**

Fig. 13.12: 簡略化されたナイキストの安定判別法

**手順 3** ベクトル軌跡が、点  $-1 + j0$  を常に左手に見れば、フィードバック制御系は内部安定、そうでなければ不安定となる。

**例題 13.6.** 例題 11.6, 13.1 で考えた  $P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)}$  と  $C(s) = \frac{1}{s}$  で構成されるフィードバック制御系を考える。例 13.1 より、 $D_p(s)D_c(s)$  は、開ループ極に 0 をもち、他の 2 つは安定である。したがって簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s + 0.1)(s + 1)}$  のベクトル軌跡を描くと Fig. 13.13(a) がえられる。

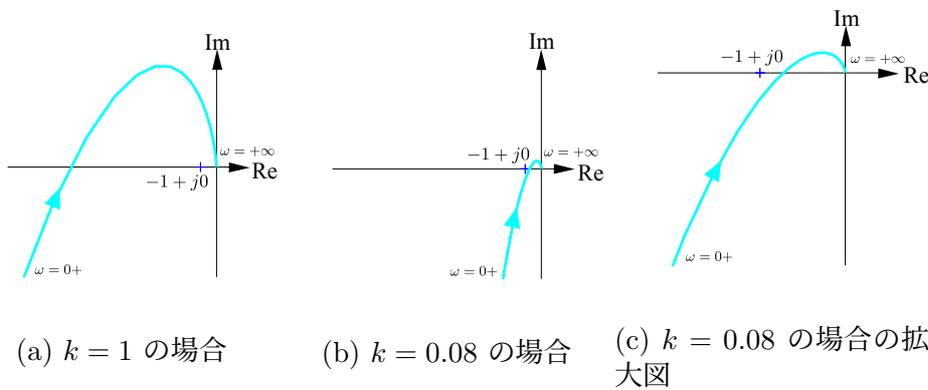


Fig. 13.13:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{k}{s(s + 0.1)(s + 1)}$  のベクトル軌跡

ベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  を右手に見て原点へと収束していく。したがってフィードバック制御系は内部安定ではない。これは、例 11.6 で特性多項式の根を求めた結果とももちろん一致する。 □

**例題 13.7.** 例 13.6 で、コントローラ  $C(s)$  を  $C(s) = \frac{0.08}{s}$  と変更した場合を考える。開ループ極は、例 13.6 の場合から変わらない。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)} \times \frac{0.08}{s} = \frac{0.08}{s(s + 0.1)(s + 1)}$  のベクトル軌跡を描くと Fig. 13.13(b), あるいはその拡大図 Fig. 13.13(c) がえられる。

ベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  を常に左手に見て原点へと収束していく。よってこの場合、フィードバック制御系は内部安定である。□

### 13.5.1 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

Fig. 13.12 や例 13.6, 13.7 でのベクトル軌跡 Fig. 13.13 などから、つぎのことが理解される。開ループ伝達関数  $L(s)$  のベクトル軌跡が、点  $-1 + j0$  を常に左手に見て、かつ点  $-1 + j0$  との距離を十分に保ったうえで原点へ収束していけば、フィードバック制御系は実用に耐えうる安定性をもつ。例えば、例 13.4 の Fig. 13.10(a) や例 13.7 の Fig. 13.13(c) が安定なフィードバック制御系の開ループ特性をあらわしている。逆に、開ループ伝達関数  $L(s)$  のベクトル軌跡が、点  $-1 + j0$  に近づいていけば、フィードバック制御系は安定性を損なっていく。例えば、例 13.4 の Fig. 13.10(b) がこのような状況である。また、開ループ伝達関数  $L(s)$  のベクトル軌跡が、ついに点  $-1 + j0$  を越えて、これを右手に見るようになると、フィードバック制御系は不安定になる。例えば、例 13.4 の Fig. 13.10(c) や例 13.6 の Fig. 13.13(a) が、不安定になってしまった状況をあらわしている。したがって、開ループ伝達関数  $L(s)$  のベクトル軌跡と点  $-1 + j0$  との距離を測る物差しを考えておけば、フィードバック制御系の安定余裕を測ることができるようになる。つぎに考える、ゲイン余裕、位相余裕は、安定余裕を測るこのような物差しである。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のベクトル軌跡 Fig. 13.14(a) とボード線図 Fig. 13.14(b) を考えよう。はじめに、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  と位相交差周波数  $\omega_{pc}$  を定義する。

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ :  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数  $\omega$

位相交差周波数  $\omega_{pc}$ :  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180$  [deg] となる周波数  $\omega$

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  は、低周波域 ( $\omega$  が小さいところ) では大きかったゲイン  $|L(j\omega)|$  の値が、周波数が高くなる ( $\omega$  が大きくなる) につれてだんだんと小さくなり、ちょうど  $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となる周波数である。Fig. 13.14(a) のベクトル軌跡には、半径 1 の単位円を書き加えている。したがって開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のベクトル軌跡とこの単位円は、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  で交差する。一方 Fig. 13.14(b) のボード線図では、 $20 \log L(j\omega_{pc}) = 20 \log 1 = 0$  [dB] から、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  を読み取ることができる。

同様に位相交差周波数  $\omega_{pc}$  を考えよう。位相交差周波数  $\omega_{pc}$  は、低周波域では小さかった位相の遅れ  $\angle L(j\omega)$  が、周波数が高くなるにつれてだんだんと大きくなり、ちょうど  $\angle L(j\omega_{pc}) = -180$  [deg] となる周波数である。Fig. 13.14(a) のベクトル軌跡では、開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のベクトル軌跡と実軸が位相交差周波数  $\omega_{pc}$  で交差するし、Fig. 13.14(b) のボード線図では、 $\angle L(j\omega_{pc}) = -180$  [deg] から位相交差周波数  $\omega_{pc}$  を読み取ることができる。

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  では、 $|L(j\omega_{gc})| = 1$  となっている。したがって、もし開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  の位相  $\angle L(j\omega)$  が、Fig. 13.14(a) に示す

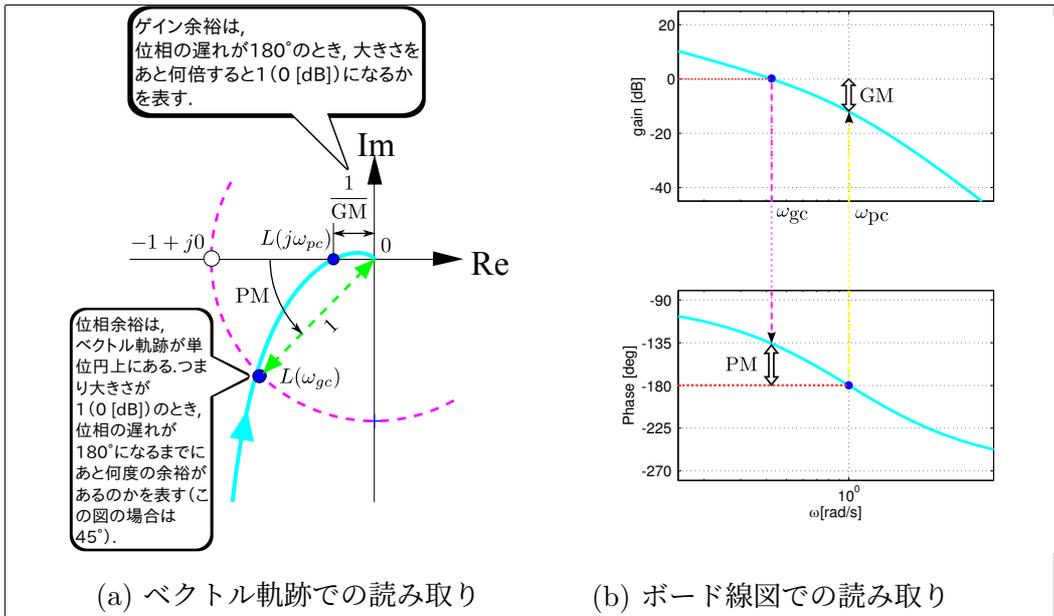


Fig. 13.14: 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

角度  $PM$  [deg] の大きさ以上にさらに遅れると、ベクトル軌跡が点  $-1 + j0$  を右手に見るようになる。つまりフィードバック制御系は不安定となる。逆に言うと、大きな  $PM$  をもつ開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  ならば、そのベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  から十分な距離を保ったまま原点へと収束し、実用的にも安定なフィードバック制御系がえられる。角度の大きさ  $PM$  は

$$PM = 180 \text{ [deg]} + \angle L(j\omega_{gc}) \text{ [deg]}$$

と書けるし、また Fig. 13.14(b) のボード線図では、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  の位置に定規をあて縦の線を書き込むことで、 $PM$  の値を読み取ることができる。 $PM$  は、フィードバック制御系がどれくらいの余裕をもって安定かと言う指標を与えてくれる大切な値で **位相余裕** と呼ばれる。ベクトル軌跡 Fig. 13.14(a)、ボード線図 Fig. 13.14(b) の双方から、位相余裕  $PM$  を読み取れることは、とても大切である。

安定余裕を測るもう一つの物差しとして、**ゲイン余裕**  $GM$  を考えよう。位相交差周波数  $\omega_{pc}$  では、 $\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \text{ [deg]}$  となっている。ゲイン余裕  $GM$  は、

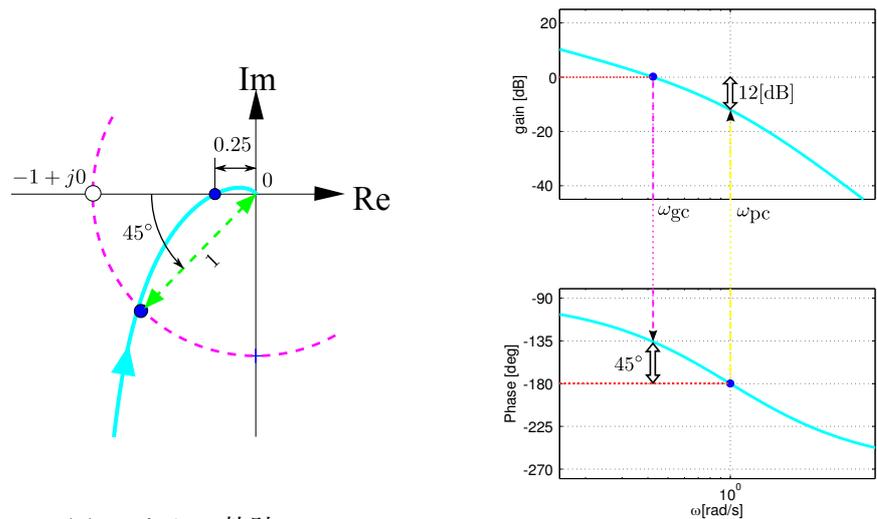
$$GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$

と定義される。Fig. 13.14(a) のベクトル軌跡では、 $|L(j\omega_{pc})|$  の逆数としてゲイン余裕  $GM$  を読み取ることができる。ここで開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  に定数  $GM$  をかけた、つまり  $L(s)$  のゲインを  $GM$  だけあげた、新しい開ループ伝達関数  $GM \times L(s)$  を考えよう。 $\angle(GM \times L(j\omega_{pc})) = \angle GM + \angle L(j\omega_{pc}) = 0 - 180 \text{ [deg]}$  であり、 $|GM \times L(j\omega_{pc})| = |GM| \times |L(j\omega_{pc})| = 1$  であるから、 $GM \times L(s)$  のベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  を通過する。もし  $L(s)$  のゲインを  $GM$  以上にあげた開ループ伝達関数を考えれば、この時フィードバック制御系は不安定となる。したがってゲイン余裕  $GM$  は、開ループ伝達

関数  $L(s) = P(s)C(s)$  のゲインをどこまであげてもフィードバック制御系が安定なままかということ測っている。また大きなゲイン余裕 GM をもつ開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$  ならば、そのベクトル軌跡は点  $-1 + j0$  から十分な距離を保ったまま原点へと収束し、実用的にも安定な制御系がえられる。ボード線図 Fig. 13.14(b) では、位相交差周波数  $\omega_{pc}$  の位置に定規をあて縦の線を書き込めば、デシベル値でのゲイン余裕 GM [dB] を読み取ることができる。位相余裕 PM と同様、ベクトル軌跡 Fig. 13.14(a)、ボード線図 Fig. 13.14(b) の双方から、ゲイン余裕 GM を読み取れることは、とても大切である。

**例題 13.8.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$  とコントローラ  $C(s) = \frac{0.5}{s}$  からなるフィードバック制御系を考える。  $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times s$  より、簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる。

開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{0.5}{s}$  のベクトル軌跡を Fig. 13.15(a) に、またボード線図を Fig. 13.15(b) に示す。ベクトル軌跡には、半径 1 の単位円を、またボード線図には、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ 、位相交差周波数  $\omega_{pc}$  の点で縦の線をそれぞれ書き加えている。



(a) ベクトル軌跡

(b) ボード線図

Fig. 13.15:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$  のベクトル軌跡とボード線図

Fig. 13.15(a) のベクトル軌跡, Fig. 13.15(b) のボード線図の双方から、この制御系の位相余裕が  $PM = 45$  [deg] 程度, ゲイン余裕が  $GM = 12$  [dB] (=  $-20 \log 0.25$ ) 程度と読み取ることができる。

位相余裕 PM, ゲイン余裕 GM をベクトル軌跡, ボード線図の双方から読み取れることは、とても大切である。 □

**matlab note 13.2** (margin). コマンド `margin(sys)` により、システム `sys` のゲイン余裕, 位相余裕が確認できる。例えば、例題 13.8 の制御対象

$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$  とコントローラ  $C(s) = \frac{0.5}{s}$  を考える場合、フィードバック制御系のゲイン余裕, 位相余裕は

```
1: sys_p = zpk( [], [ -1 -1 ], 1 );
2: sys_c = tf( [ 0.5 ], [ 1 0 ] );
3: sys_l = sys_p * sys_c;
4: margin( sys_l )
```

のように確認できる. □

**例題 13.9.** 例題 13.4 の制御対象  $P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$  とコントローラ  $C(s) = \frac{k}{s+0.1}$  を再度考えよう. Fig 13.9, 13.10 の場合と同様に,  $k = 1, 2.4, 3$  それぞれの場合のボード線図を Fig 13.16 に示す.

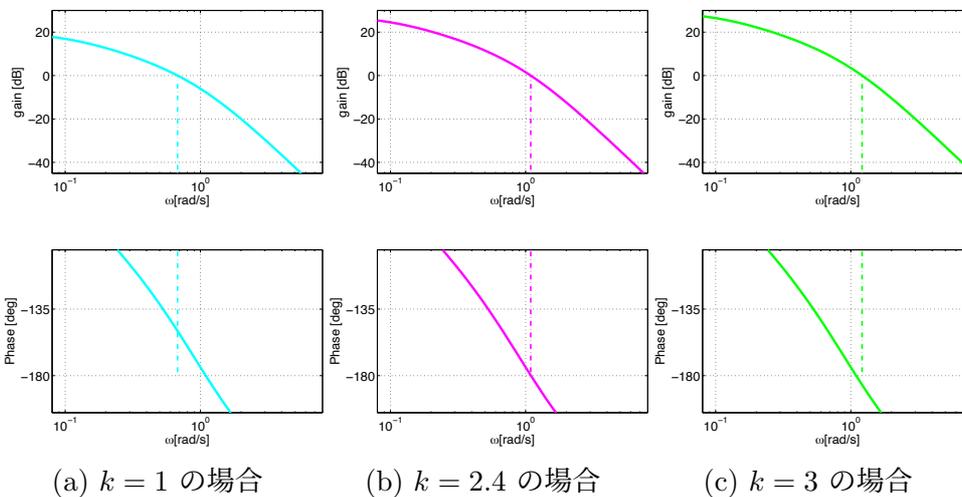


Fig. 13.16:  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$  のボード線図

$k = 1$  の場合は,  $PM = 30$  [deg] 程度の位相余裕があること,  $k = 2.4$  の場合は, 位相余裕  $PM$  がほとんどなく, いわば安定限界と呼べるような状況になっていること, そして  $k = 3$  の場合は, ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  での位相  $\angle L(j\omega_{gc})$  が  $180$  [deg] 以上遅れており, 不安定な制御系になっていることをそれぞれ読み取ることができる. もちろんこれらは, Fig 13.10 から読み取ることができる状況と全く同じである. Fig 13.10 に示すようなベクトル軌跡 (ナイキスト軌跡) や Fig. 13.16 に示すようなボード線図の双方から, 位相余裕  $PM$  を読み取ることができるのは, とても大切である. □

この章のまとめとして, 13.1 節の例を振り返っておこう. 13.1 節の最後に述べたように, Fig. 13.3 のボード線図を見ただけで, フィードバック制御系の安定性を判別できるようになってもらえただろうか. Fig. 13.3 のボード線図で, Fig. 13.15(b) と同様に, ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  のところに定規をあて, 縦の線を書き入れてみよう. こうするだけで,  $k = 1, 3$  の場合は, それぞれ  $80$  [deg],  $70$  [deg] 程度の位相余裕  $PM$  をもっていると読み取ってもらえることができ

る. 一方  $k = 9$  の場合には, 位相余裕  $PM$  がほとんどないことをすぐに読み取ってもらえる. これが 13.1 節の最後で, Fig. 13.3 のボード線図を見ただけで安定判別ができると述べた理由である.

#### 第 13 章のまとめ

- ナイキストの安定判別法を理解しよう.
- 位相交差周波数, ゲイン交差周波数を理解しよう.
- 位相余裕, ゲイン余裕による安定余裕を理解しよう.

## 13.6 演習問題

**演習問題 13.1.** Fig. 13.1(a) のフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を考える。

1. フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性の定義を簡潔に述べなさい。
2.  $P(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ ,  $C(s) = \frac{(s+1)(s+6)}{s}$  とする。このフィードバック制御系の特性多項式  $\phi(s)$  を求めなさい。
3. このフィードバック制御系の安定性を判定しなさい。

**演習問題 13.2.** Fig. 13.1(a) のフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を考える。ただし  $P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ ,  $C_2(s) = \frac{1}{s}$  とする。

1. 伝達関数  $\frac{1}{s+1}$  のベクトル軌跡を Fig. 13.17(a) に記入しなさい。
2.  $C_2(s)$  のベクトル軌跡を Fig. 13.17(b) に記入しなさい。

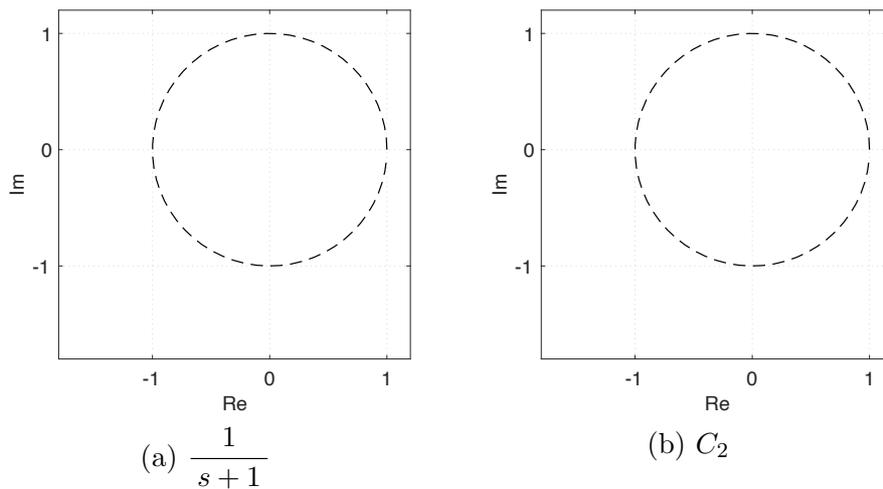
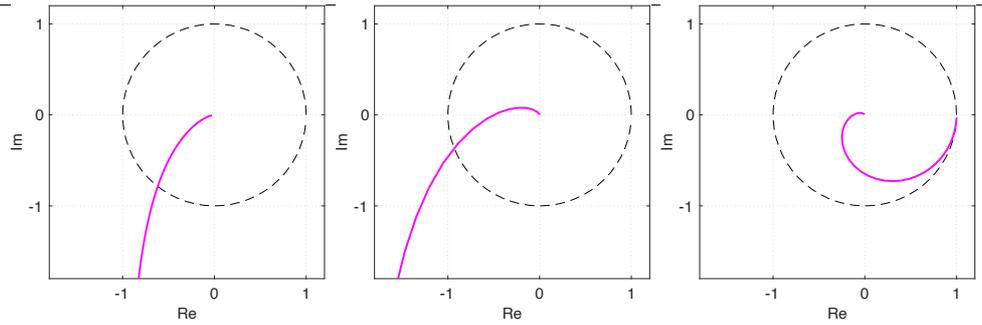


Fig. 13.17: ベクトル軌跡

3. 開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  の  $|L_2(j\omega)|$ ,  $\angle L_2(j\omega)$  を求めなさい。
4.  $|L_2(j0)|$ ,  $\angle L_2(j0)$  を求めなさい。
5.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_2(j\omega)|$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L_2(j\omega)$  を求めなさい。
6. Fig. 13.18 のうち、開ループ特性  $L_2(s)$  のベクトル軌跡を示しているのはどれか？
7. ナイキストの安定判別法により、このフィードバック制御系の安定性を判定しなさい。

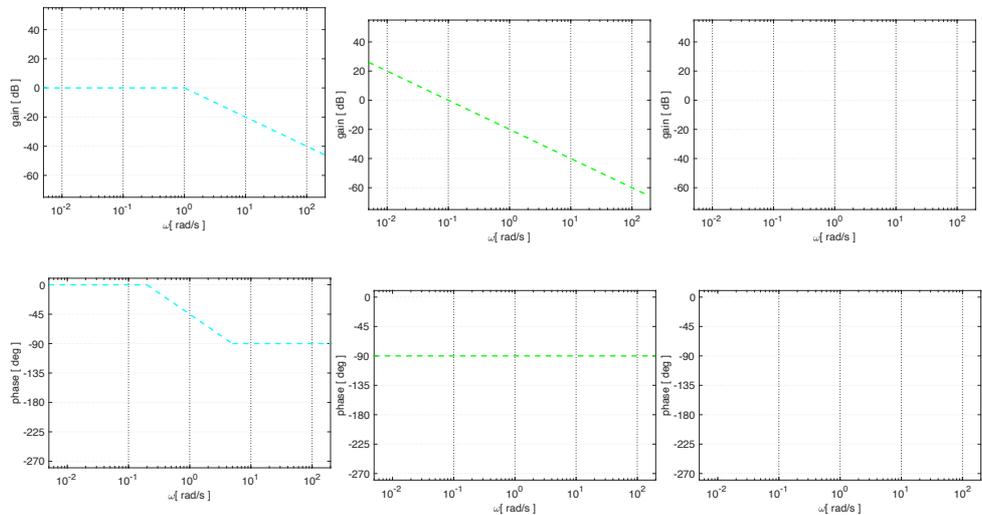


(a)  $L_2$  かな?      (b)  $L_2$  かな?      (c)  $L_2$  かな?

Fig. 13.18: ベクトル軌跡

**演習問題 13.3.** 演習問題 13.2 の  $P(s)$  に  $C_1(s) = \frac{1}{10} \frac{1}{s}$  を適用し, Fig. 13.1(a) のフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を考える.

- 伝達関数  $\frac{1}{s+1}$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図ともに折れ線近似) は, Fig. 13.19(a) で与えられる.  $P(s)$  のボード線図を, 折れ線近似により, Fig. 13.19(a) に記入しなさい.
- $C_1(s)$  のボード線図は, Fig. 13.19(b) で与えられる. 開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のボード線図を, 折れ線近似により, Fig. 13.19(c) に記入しなさい.



(a)  $\frac{1}{s+1}, P$       (b)  $C_1$       (c)  $L_1$

Fig. 13.19: ボード線図

- この制御系の位相余裕を読み取りなさい.

**演習問題 13.4.** 演習問題 13.2, 13.3 の  $P(s)$  に  $C_1(s), C_2(s), C_3(s) = \frac{2}{s}$  をそれぞれ適用し, Fig. 13.1(a) のフィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を考える. 開ループ特性  $L_1(s), L_2(s), L_3(s) = P(s)C_3(s)$  のボード線図は, Fig. 13.20 で与えられる.

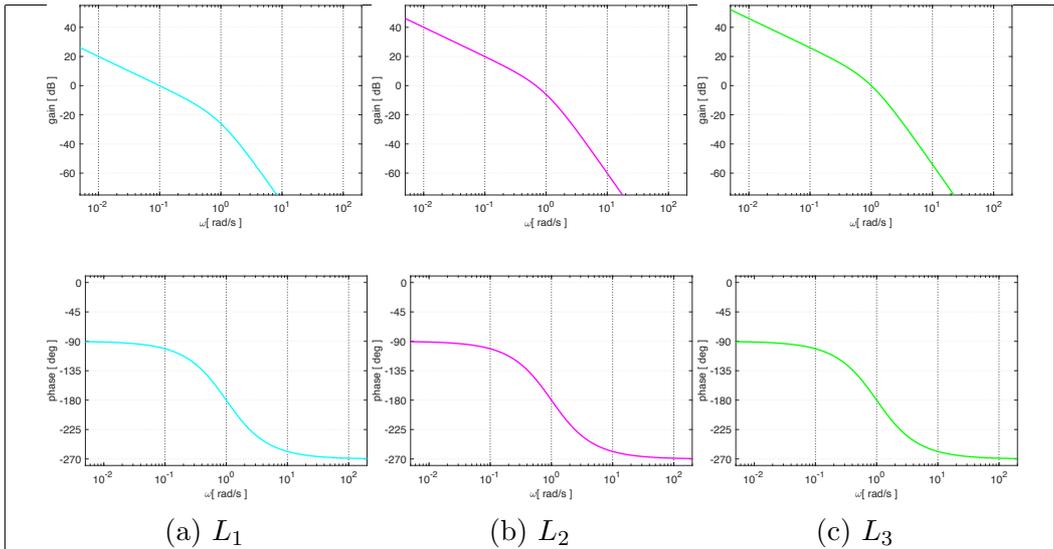


Fig. 13.20: ボード線図

1.  $C_1, C_2, C_3$  を適用した場合の位相余裕を、それぞれ読み取りなさい。
2.  $C_1, C_2, C_3$  を適用したそれぞれのフィードバック制御系の安定性を判定しなさい。
3.  $C_1, C_2, C_3$  を適用したフィードバック制御系のステップ応答は、Fig. 13.21のいずれかで与えられる。 $C_1, C_2, C_3$  とステップ応答の正しい組み合わせを答えなさい。

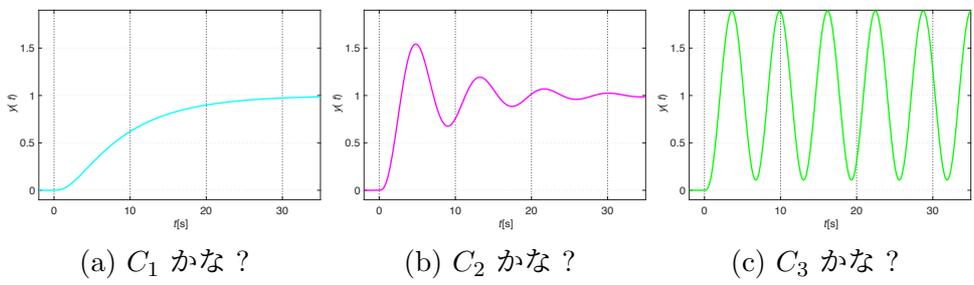


Fig. 13.21: ステップ応答

演習問題 13.5.  $P(s) = \frac{1}{s-1}, C(s) = \frac{s-1}{s+1}$  とする<sup>15</sup>

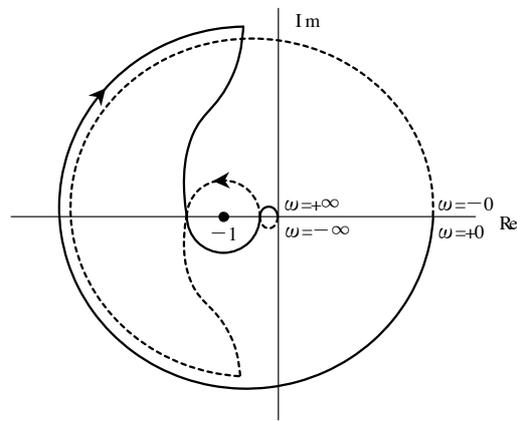
1. (13.4), (13.5) 式における  $N_p(s), D_p(s), N_c(s), D_c(s)$  を求めなさい。
2. 開ループ伝達関数を求めなさい。
3. 不安定な開ループ極の数を求めなさい。
4. ナイキストの安定判別法により、不安定な閉ループ極の数を求めなさい。

<sup>15</sup>不安定な極零相殺と呼ばれる状況の例になっている。実際には、不安定な極零相殺が生じると、フィードバック制御系は内部安定にはならないことが知られていて、ナイキストの安定判別法を適用しなくても不安定と判定できる。

**演習問題 13.6.**  $P(s) = \frac{1}{s}$ ,  $C(s) = \frac{20}{s^2 + 5s + 2}$  により構成されるフィードバック制御系を考える. この制御系のゲイン余裕を求めなさい. またこのフィードバック制御系の安定性を判定しなさい.

**演習問題 13.7.**  $P(s) = \frac{K}{s}$ ,  $K > 0$ ,  $C(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$  により構成されるフィードバック制御系を考える. このフィードバック制御系を安定にする  $K$  の条件を, ナイキストの安定判別法により, 求めなさい (ヒント:  $L(j\omega)$  の虚数部が 0 となる  $\omega$  の値を求めてみよう.).

**演習問題 13.8.** 開ループ伝達関数  $L(s)$  のナイキスト軌跡が下図で与えられるフィードバック制御系を考える. この制御系の安定性を判定しなさい. ただし,  $L(s)$  は不安定極を 3 つもつとする.



**演習問題 13.9.** つぎの開ループ伝達関数  $L(s)$  を考える. フィードバック制御系の安定性を, ナイキストの安定判別法に基づき判定しなさい. ただし, 少なくとも角周波数  $\omega = 0, 1, \infty$  について  $|L(j\omega)|$  と  $\angle L(j\omega)$  の値を計算すること.

$$L(s) = \frac{5}{(s+1)(10s+1)}$$

**演習問題 13.10.** 開ループ伝達関数が以下で与えられるフィードバック制御系を考える.

$$\frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

この制御系が安定となる定数  $K$  の範囲を, 以下の手順により求めなさい.

1.  $\angle L(j\omega) = -180$  [deg] の条件より, 位相交差角周波数  $\omega_{pc}$  を求めなさい (答え:  $\omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ ).
2.  $L(j\omega_{pc}) > -1$  の条件より, フィードバック系が安定となる  $K$  の範囲を求めなさい (答え:  $K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ ).

**演習問題 13.11.** 開ループ伝達関数が以下で与えられるフィードバック制御系を考える.

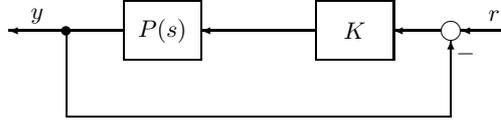
$$G_0(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \quad T_1 = 1 \quad T_2 = 2 \quad T_3 = 3$$

位相交差角周波数は  $\omega_{pc} = \sqrt{\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}}$  で与えられる. この制御系のゲイン余裕が 20 [dB] となるように, 定数  $K$  の値を定めなさい. ただし, ゲイン  $|G(j\omega)|$  のデシベル値は  $20 \log |G(j\omega)|$  で与えられることに注意する (答え:  $K = 1$ ).

**演習問題 13.12.** 下図のフィードバック制御系を考える.

$$P(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$T_1 = 1 \quad T_2 = 5$$



1.  $K = 1$  とする. 開ループ伝達関数  $L(s) = P(s) \times 1$  を, 折れ線近似により描きなさい.
2. この制御系のゲイン余裕が 10 [dB] となるように, 定数  $K$  の値を定めなさい (答え:  $K = 10^{-0.4208} \approx 0.3795$ ).
3. このときの開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)K$  を, 折れ線近似により描きなさい.
4. 描いたボード線図より, このときのゲイン交差角周波数, 位相余裕を求めなさい (答え:  $\omega_{gc} = 0.27$  rad/s 程度,  $PM = 30$  deg 程度).

### 13.7 演習問題 サンプル解答

**演習問題サンプル解答 13.1.** 1. 入力  $r, d$  から出力  $y, u$  までの4つの伝達関数がすべて安定, あるいは, 特性方程式  $\phi(s) = 0$  の根の実数部がすべて負, となっている.

2.  $N_p(s) = s + 2, D_p(s) = (s + 1)(s + 3), N_c(s) = (s + 1)(s + 6), D_c(s) = s$  より,  $\phi(s) = N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = (s + 1)(s + 1)(s + 6) + (s + 1)(s + 3)s = (s + 1)((s + 2)(s + 6) + s(s + 3)) = (s + 1)(2s^2 + 11s + 12)$ .

3.  $\phi(s) = 0$  の根を求めると  $-1, -4, -3/2$  であり, すべて (実数部が) 負であるので, フィードバック制御系は安定.

**演習問題サンプル解答 13.2.** 1. 伝達関数  $\frac{1}{s + 1}$  のベクトル軌跡は, Fig. 13.22(a) のとおり.

2.  $C_2(s) = 1/s$  のベクトル軌跡は, Fig. 13.22(b) のとおり.

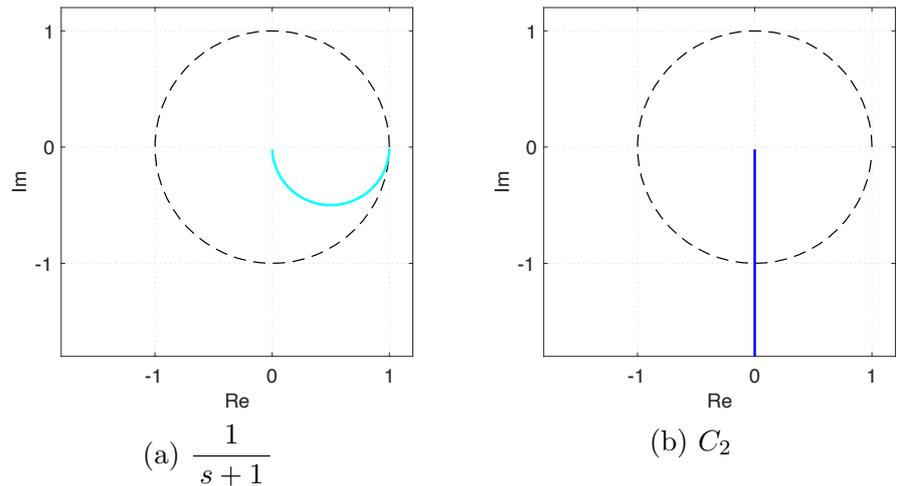


Fig. 13.22: ベクトル軌跡

3.  $L_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{j\omega + 1} \right)^2$  であるので,  $\left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{|\omega|}$  と  $\left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$  より,  $|L_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega} \right| \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right|^2 = \frac{1}{|\omega|(\omega^2 + 1)}$ .

同様に  $\angle \frac{1}{j\omega} = -\frac{\pi}{2}$  と  $\angle \frac{1}{j\omega + 1} = -\tan^{-1} \omega$  より,  $\angle L_2(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} + 2\angle \frac{1}{j\omega + 1} = -\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} \omega$ .

4.  $|L_2(j0)| = \infty, \angle L_2(j0) = -\pi/2$ .

5.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_2(j\omega)| = 0, \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L_2(j\omega) = -3\pi/2$ .

6.  $\angle L_2(j0) = -\pi/2$  より, (c) ではなく (a), (b) のどちらか.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L_2(j\omega) = -3\pi/2$  より (a) ではない. したがって (b).

7.  $L_2$  には, 簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる. 図 13.18(b) のベクトル軌跡上を進むとき, 点  $-1 + j0$  を常に左手に見ているので, フィードバック制御系は有界入力有界出力安定.

**演習問題サンプル解答 13.3.** 1.  $P$  のボード線図 (折れ線近似) は, Fig. 13.23(a) のとおり.  $\frac{1}{s+1}$  のボード線図を二つ加え合わせればえられることに注意する.

2.  $L_1$  のボード線図 (折れ線近似) は Fig. 13.23(b) のとおり.  $P$  と  $C_1$  のボード線図を加え合わせればえられることに注意する. なお近似なしの  $L_1$  のボード線図は Fig. 13.20(a) のとおり. 両図を比較してみよう.

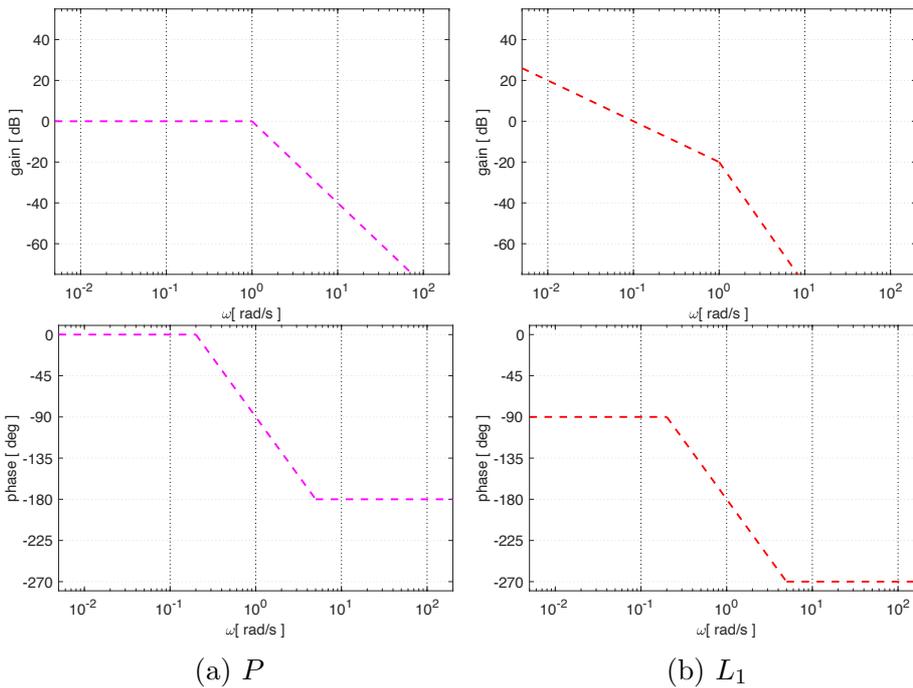


Fig. 13.23: ボード線図

3.  $90^\circ$

**演習問題サンプル解答 13.4.** 1.  $C_1$  を適用した場合は  $90^\circ$  弱,  $C_2$  を適用した場合は  $20^\circ$  程度,  $C_3$  を適用した場合はほぼ  $0^\circ$  とそれぞれ読み取れる.

2.  $C_1, C_2, C_3$  いずれの場合も, 簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる.  $C_1, C_2$  を適用した場合は, 位相余裕があるので, フィードバック制御系はそれぞれ内部安定.  $C_3$  を適用した場合は, 位相余裕がほぼ  $0^\circ$  なので, 安定と不安定の間のような状態にある.
3.  $C_1, C_2$  を適用した場合は, それぞれ内部安定ではあるものの, 位相余裕が  $20^\circ$  程度と小さい  $C_2$  の場合は振動的な応答を示す. したがって,  $C_1$  を適用した場合は (a),  $C_2$  を適用した場合は (b).  $C_3$  を適用した場合は, 安定と不安定の間のような状態であり, 振動の持続する (c) のような応答がえられる.

**演習問題サンプル解答 13.5.** 1.  $N_p(s) = 1$  ( $m_p = 0$ ),  $D_p(s) = s - 1$  ( $n_p = 1$ ),  $N_c(s) = s - 1$  ( $m_c = 1$ ),  $D_c(s) = s + 1$  ( $n_c = 1$ ).

$$2. L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}.$$

3.  $D_p(s)D_c(s) = (s-1)(s+1) = 0$  より, 開ループ極は 1 と  $-1$ . したがって不安定な開ループ極の数は  $P = 1$ .

4.  $L(s) = 1/(s+1)$  より, ナイキスト軌跡は Fig. 13.8 と同じ. したがって点  $-1 + j0$  を囲む回数は  $N = 0$ .  $N = Z - P$  より  $P = 1$  であり, 不安定な閉ループ極が 1 つ存在し, フィードバック制御系は安定ではない.

**演習問題サンプル解答 13.6.** 簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる. 周波数伝達関数  $L(j\omega)$  を求めると

$$L(j\omega) = \frac{20}{j\omega(-\omega^2 + j5\omega + 2)} = \frac{-100\omega^2 - j20\omega(2 - \omega^2)}{(-5\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2}$$

となる. 位相が  $180^\circ$  遅れる, すなわち  $L(j\omega)$  の虚数部が 0 となる位相交差周波数  $\omega_{pc}$  を考える ( $\text{Im}L(j\omega_{pc}) = 0$ ) と,  $\omega_{pc} = \sqrt{2}$  [rad/s]. よって  $|L(j\omega_{pc})| = 2$  より,  $\text{GM} = 1/2 \approx -6$  [dB]. したがってこのフィードバック制御系は内部安定ではない.

**演習問題サンプル解答 13.7.** 簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる. 周波数伝達関数  $L(j\omega)$  を求めると

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(-\omega^2 + j2\omega + 1)} = \frac{-2K\omega^2 - jK\omega(1 - \omega^2)}{(-2\omega^2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2)^2}$$

となる. 位相が  $180^\circ$  遅れる, すなわち  $L(j\omega)$  の虚数部が 0 となる位相交差周波数  $\omega_{pc}$  を考える ( $\text{Im}L(j\omega_{pc}) = 0$ ) と,  $\omega_{pc} = 1$  [rad/s]. よって  $L(j\omega_{pc}) = -K/2$ . 点  $-K/2 + j0$  が点  $-1 + j0$  より右側にあれば, ナイキストの安定判別法より内部安定となる. したがって  $0 < K < 2$ .

**演習問題サンプル解答 13.8.**

**演習問題サンプル解答 13.9.**

**演習問題サンプル解答 13.10.**

**演習問題サンプル解答 13.11.**

**演習問題サンプル解答 13.12.**

# 第14章 ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

はじめに,

## 第14章のポイント

- ループ整形法のポイント
  - ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , バンド幅  $\omega_{bw}$ : 速応性
  - 低定周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$ : 定常特性
  - 位相余裕 PM: 安定性
- 位相遅れコントローラを理解しよう
- 位相進みコントローラを理解しよう

## 14.1 ループ整形法の考え方

ここでは, ループ整形法によるフィードバック制御系の設計を考える. はじめに, つぎの例を確認してみよう.

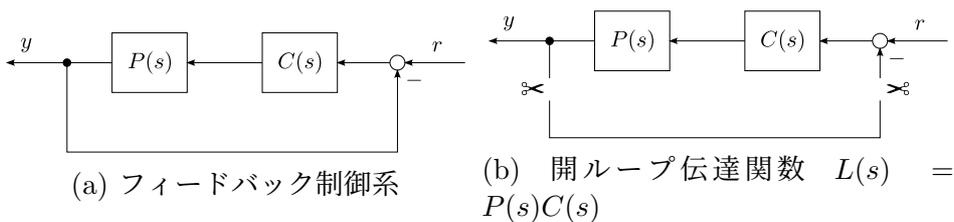


Fig. 14.1: フィードバック制御系と開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)C(s)$

**例題 14.1.** とある制御対象  $P(s)$  にコントローラ  $C_1(s) = 1$  を適用した開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s) = P(s)$  (Fig. 14.1(b) 参照) のボード線図を Fig. 14.2(a) に, またこのフィードバック制御系 (Fig. 14.1(a) 参照) のステップ応答を Fig. 14.3(a) に示す.

同様に, 同じ制御対象  $P(s)$  にとあるコントローラ  $C_2(s)$  を適用した開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  (Fig. 14.1(b) 参照) のボード線図を Fig. 14.2(b) に, このフィードバック制御系 (Fig. 14.1(a) 参照) のステップ応答を Fig. 14.3(b) に示す.

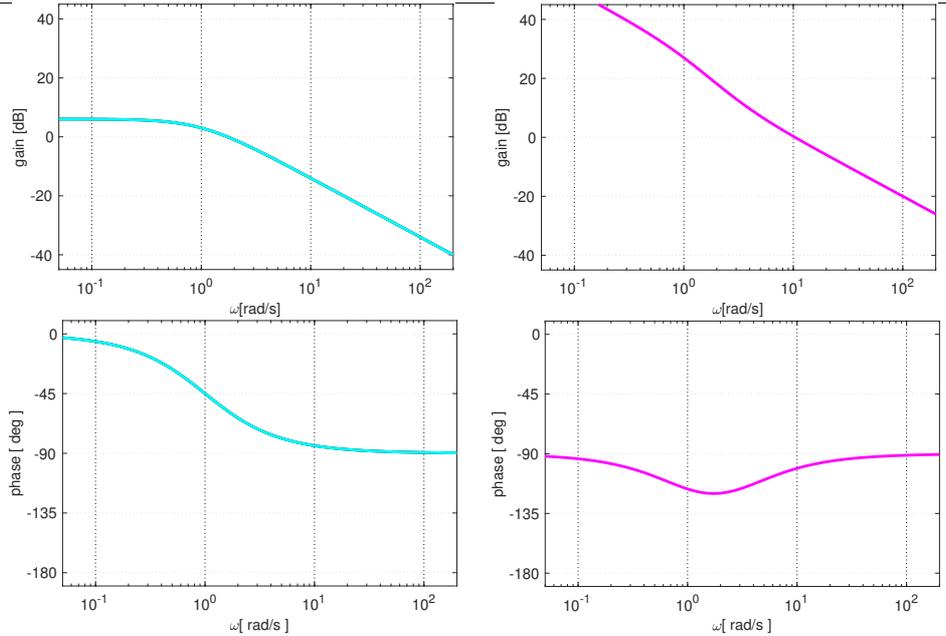
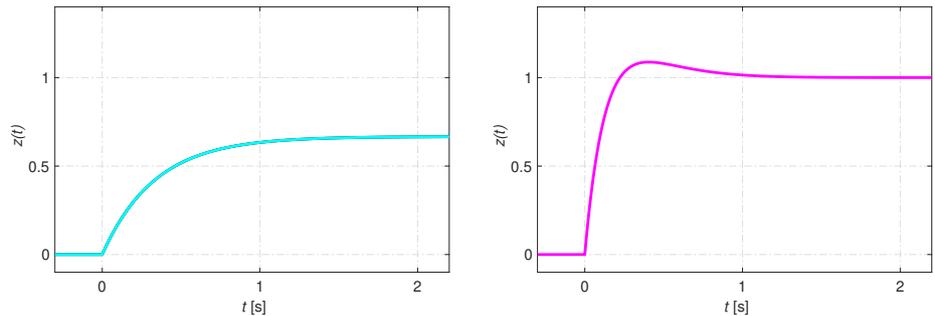
(a) ボード線図:  $L_0(s) = P(s)$ (b) ボード線図:  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$ Fig. 14.2: とあるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$ (a) ステップ応答:  $C_1(s)$  のとき(b) ステップ応答:  $C_2(s)$  のとき

Fig. 14.3: とあるフィードバック制御系: ステップ応答

Fig. 14.3(a) と Fig. 14.3(b) を比較すればわかるように,  $C_2(s)$  を適用した Fig. 14.3(b) の方が速応性に優れている (素早い応答を示している). また Fig. 14.3(a) では定常偏差を生じているが ( $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \neq 1 = r(t)$ ),  $C_2(s)$  を適用した Fig. 14.3(b) では定常偏差が 0 である.  $\square$

じつは, この章でこれから考えるループ整形法がすでに理解できている制御技術者は, Fig. 14.2(a) と Fig. 14.2(b) のボード線図を比較しただけで,  $C_2(s)$  を適用した方が速応性に優れているな, と判断できる. また Fig. 14.2(a) を見ただけでステップ応答に定常偏差が生じること, 逆に Fig. 14.2(b) を見ただけでステップ応答に定常偏差が生じないこと, なども判断できてしまう. 開ループ特性 Figs. 14.2(a), 14.2(b) のどこに着目すれば, このような判断ができるのであろうか? つぎの 14.2 節では, 開ループ特性において着目すべきポイントを確認しよう. これにより, 望ましい開ループ特性の“形”が理解できる.

望ましい開ループ特性の形が理解できれば, 例えば Fig. 14.2(a) にあるよ

うな、あまり望ましくない形をした開ループ特性  $L_1(s) = P(s)$  を変形 (整形) し、例えば Fig. 14.2(b) にあるような、より望ましい開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  を与えてくれるコントローラ  $C_2(s)$  を設計すれば良いことになる。このように、開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s)$  に着目し、開ループ特性を望ましい形に整形するコントローラ  $C(s)$  の設計手順をループ整形法という。具体的なコントローラの設計手順は、14.3 節で考える。

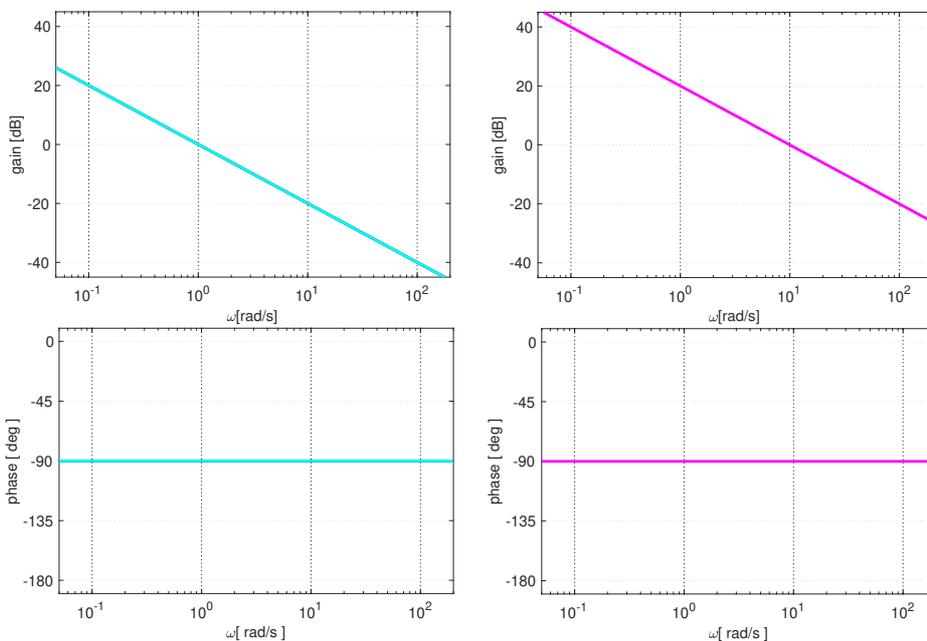
## 14.2 ループ整形のポイント

開ループ特性において着目すべきポイントを確認し、望ましい開ループ特性の“形”を理解しよう。

### 14.2.1 ループ整形のポイント: ゲイン交差周波数 $\omega_{gc}$

つぎの例題を考えてみよう。

**例題 14.2.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s}$  とコントローラ  $C(s) = k$  からなるフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) を考えよう。  $k = 1, 10$  とした場合それぞれについて、Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s) = \frac{k}{s}$  を Figs. 14.4(a), 14.4(b) に、また Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系のステップ応答  $z(t)$  を Figs. 14.5(a), 14.5(b) に、この時の制御入力  $u(t)$  を Figs. 14.5(c), 14.5(d) に示す。



(a) ボード線図:  $k = 1$  のとき

(b) ボード線図:  $k = 10$  のとき

Fig. 14.4: ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  (バンド幅  $\omega_{bw}$ ) の異なるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$

$k = 1$  とした場合のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  ( $\approx$  バンド幅  $\omega_{bw}$ ) は, 1 rad/s であり,  $k = 10$  の場合は 10 rad/s となっている. Figs. 14.5(a), 14.5(b) のステップ応答を比較すると,  $\omega_{gc} = 10$  rad/s となっている  $k = 10$  の場合の方が, 速応性に優れている.

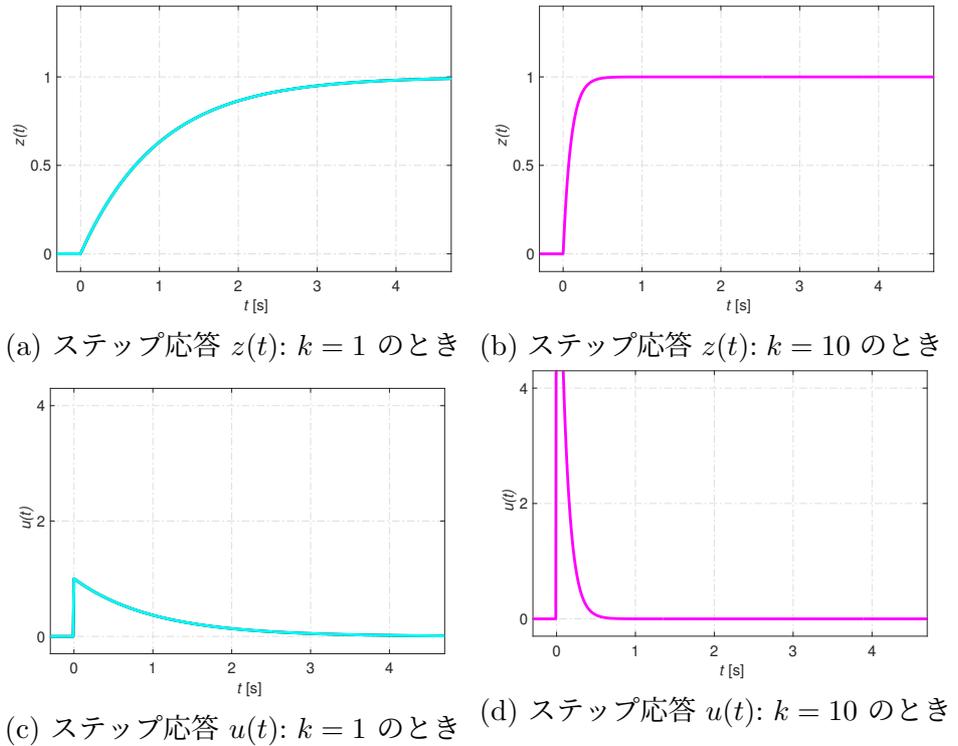


Fig. 14.5: ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  (バンド幅  $\omega_{bw}$ ) の異なるフィードバック制御系: ステップ応答

応答の速い (速応性に優れた) フィードバック制御系の実現には, 高いゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  ( $\approx$  バンド幅  $\omega_{bw}$ ) が必要になる.  $\square$

Figs. 14.5(a), 14.5(b) に見られる応答の速さ (速応性) の違いの理由を考えてみよう. 9.3 節で確認したように

- バンド幅  $\omega_{bw}$  の広い制御系  $\Leftrightarrow$  応答の早い制御系

であった. そこでフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) における目標値  $r(t)$  から出力  $z(t)$  までの伝達関数

$$G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = T(s)$$

のバンド幅  $\omega_{bw}$  を考えよう.

$k = 1, 10$  とした場合それぞれについて, Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s)$  (つまり Figs. 14.4(a), 14.4(b) と同じ物) を実線で, Fig. 14.1(a) の閉ループ特性  $G_{zr}(s) = T(s)$  を破線で Figs. 14.6(a), 14.6(b) に示す. Fig. 14.6 より,  $\omega_{bw} \approx \omega_{gc}$  となっていることがわかる.

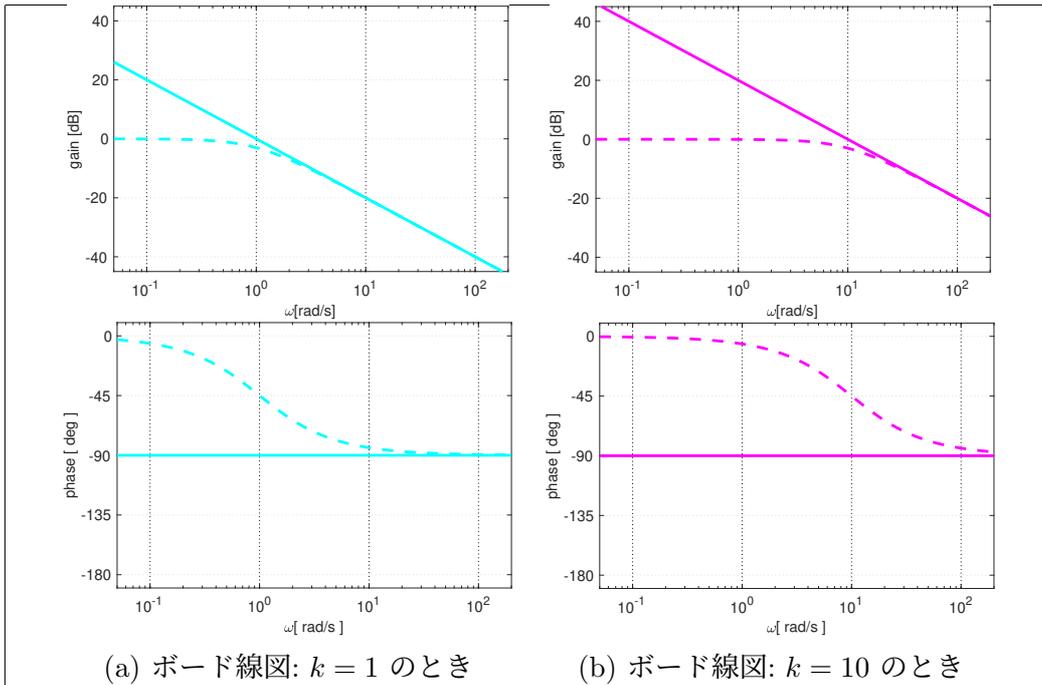


Fig. 14.6: ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  (バンド幅  $\omega_{bw}$ ) の異なるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$  と閉ループ特性  $G_{zr}(j\omega) = T(j\omega)$

Fig. 14.6 では、 $\omega_{bw} \approx \omega_{gc}$  であることがわかるが、より厳密には、 $-90 \text{ deg} > \angle L(j\omega_{gc}) > -180 \text{ deg}$  の場合、 $\omega_{gc} < \omega_{bw}$  であることが簡単に確認できる<sup>1</sup>。つまりゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  を高くすることはバンド幅  $\omega_{bw}$  を広げることにつながる。したがって速応性に優れた制御系を実現することができる。これをループ整形のポイント ポイント 1 としよう。

ポイント 1 速応性: 高いゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$

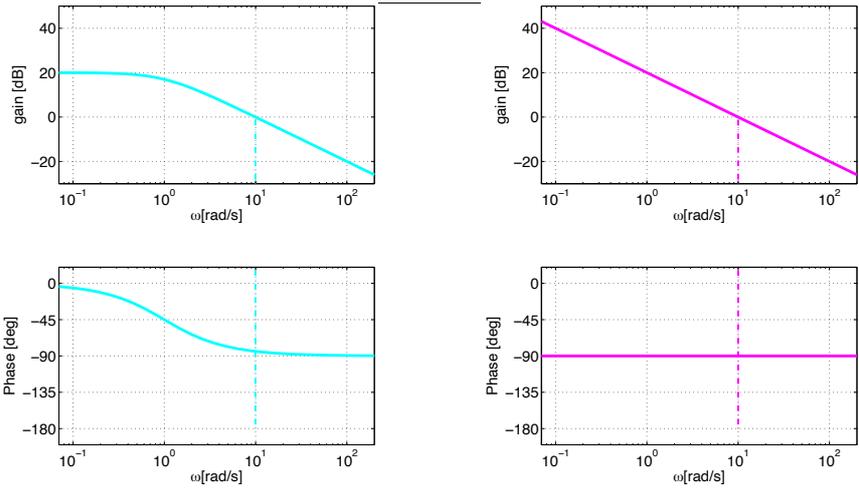
### 14.2.2 ループ整形のポイント: 低周波数ゲイン $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$

つぎの例題を考えてみよう。

**例題 14.3.** 制御対象  $P_1(s) = \frac{1}{s+1}$  あるいは  $P_2(s) = \frac{1}{s}$  とコントローラ  $C(s) = 10$  からなるフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) を考えよう。Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L_1(s) = P_1(s)C(s) = \frac{10}{s+1}$  と  $L_2(s) = P_2(s)C(s) = \frac{10}{s}$  をそれぞれ Figs. 14.7(a), 14.7(b) に、また Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系のステップ応答をそれぞれ Figs. 14.8(a), 14.8(b) に示す。

2つの制御系の  $\omega \rightarrow 0$  での開ループゲインに注目してみよう。Fig. 14.7(a) より、 $L_1(s)$  の場合は、 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)| = 20 \text{ dB} = 10$  と定数値に留まっている。一方  $L_2(s)$  の場合、低周波帯域では  $20 \text{ dB/dec}$  の傾きでゲインが増加し、 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  である。Figs. 14.8(a), 14.8(b) のステップ応答を比較する

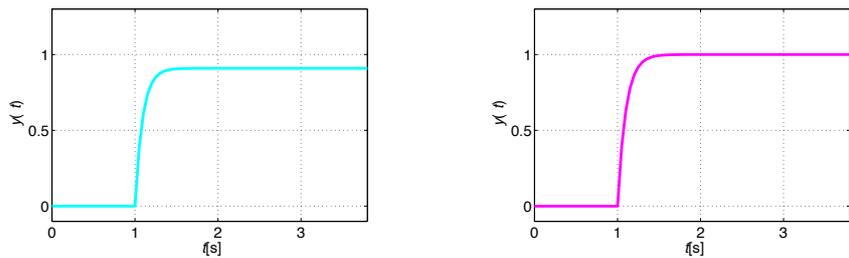
<sup>1</sup> $L(j\omega_{gc}) = \alpha + j\beta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$  において考えてみよう。



(a) ボード線図:  $L_1(s) = P_1(s)C(s)$  (b) ボード線図:  $L_2(s) = P_2(s)C(s)$

Fig. 14.7: 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$  の異なるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$

と,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  となっている  $L_2(s)$  の場合は,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1$  となり, ステップ応答に定常偏差が生じない.



(a) ステップ応答:  $P_1(s), C(s)$  のとき (b) ステップ応答:  $P_2(s), C(s)$  のとき

Fig. 14.8: 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$  の異なるフィードバック制御系: ステップ応答

低周波帯域でのゲインの増加 (20 dB/dec) と  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  が実現できているフィードバック制御系は, ステップ応答に定常偏差を生じない. □

低周波帯域での開ループゲインの増加と  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$  が実現できているフィードバック制御系が, ステップ応答に定常偏差を生じない ( $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1$  あるいは  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow t} (z(t) - r(t)) = 0$ ) 理由を考えてみよう. これは, ラプラス変換の最終値の定理を考えることで, 簡単に確認できる.

$\lim_{t \rightarrow t} z(t) = 1$  を考えても  $\lim_{t \rightarrow t} e(t) = 0$  を考えても, どちらでも同じであるので, ここでは  $\lim_{t \rightarrow t} e(t) = 0$  を考えよう. 目標値  $r$  から偏差  $e = r - z$  までの伝達関数は

$$e = r - z = r - Pu = r - PCe$$

より

$$e = \frac{1}{1+PC} r = \frac{1}{1+L} r$$

となる。ラプラス変換の最終値の定理  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s)$  とステップ入力  $r(t) = 1$  のラプラス変換  $r(s) = 1/s$  を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+L(s)} r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+L(s)} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} L(s)} \end{aligned}$$

がわかる。

ここで具体的な例として、2つの開ループ伝達関数

$$L_1(s) = \frac{10}{s+1} \quad L_3(s) = \frac{1}{s+1}$$

とその時の定常偏差  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t)$  と  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t)$  を考えてみよう。まず

$$\begin{aligned} M_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} L_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s+1} = 10 \\ M_3 &= \lim_{s \rightarrow 0} L_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1 \end{aligned}$$

であるので、 $L_1(s)$  の方の低周波数ゲインの方が大きい。

$$M_1 = \lim_{s \rightarrow 0} L_1(s) = 10 > 1 = \lim_{s \rightarrow 0} L_3(s) = M_3$$

このとき定常偏差は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \frac{1}{1+M_1} = \frac{1}{1+10} < \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+M_3} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t)$$

となるので、より大きな低周波数ゲイン  $M_1$  を持つ  $L_1(s)$  の場合の定常偏差  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t)$  の方が小さくなる。

この例からもわかるように、 $\lim_{s \rightarrow 0} L(s)$  の値が大きければ大きい程、定常偏差  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  はどんどん 0 に近づく。とくに  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \infty$  のように、その値が発散している場合には、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  とできる。それでは  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \infty$  となるためには、開ループ伝達関数  $L(s)$  はどのような形をしていけばよいだろうか？すぐにわかるように、例えば  $L(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$  や  $L(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}$  のような形をしていけばよい。実際

$$\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+1)} = \infty \quad \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2(s+10)} = \infty$$

となる。つまり開ループ伝達関数  $L(s)$  に積分器  $1/s$  が一つ以上含まれていることが重要になる。

ゲイン線図は、 $|L(j\omega)|$  をあらわしていた。  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \infty$  となっている開ループ伝達関数では、当然  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = 0$  となる。これはゲイン線図上では、 $\omega \rightarrow 0$  の低周波数帯域で  $|L(j\omega)|$  の値がいくらでも大きくなる、つまり発散している事に対応する。この点を踏まえて、例題 14.3 の二つの開ループ伝達

関数  $L_1(s) = \frac{10}{s+1}$ ,  $L_2(s) = \frac{10}{s}$  とそのボード線図 Figs. 14.7(a), 14.7(b) をもう一度確認してみよう.

$L_2(s) = \frac{10}{s}$  は, 積分器  $1/s$  を一つ含む開ループ伝達関数になっている. これが Fig. 14.7(b) のゲイン線図が低周波数帯域で 20 dB/dec の傾きをもち  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  とその値が発散していること, またその結果として Fig. 14.8(b) のステップ応答に定常偏差が生じないことの原因になっている. 一方  $L_1(s) = \frac{10}{s+1}$  は, 積分器  $1/s$  を含まない開ループ伝達関数になっている. これが Fig. 14.7(a) のゲイン線図で確認できるように, 低周波数帯域でのゲインが  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)| = 20 \text{ dB}$  と定数値に留まること, またその結果として Fig. 14.8(a) のステップ応答に定常偏差が生じることの原因になっている.

$\lim_{s \rightarrow 0} L(s)$  の値が大きければ大きいほど, つまり  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$  の値が大きければ大きいほど, フィードバック制御系のステップ応答は定常偏差を生じにくいことが確認できた. とくに  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$  の場合は, 定常偏差を 0 とできる. また  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$  の値は, ゲイン線図を見るだけで確認することができる. これをループ整形のポイント ポイント 2 としよう.

ポイント 2 定常特性: 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$

### 14.2.3 ループ整形のポイント: 位相余裕 PM

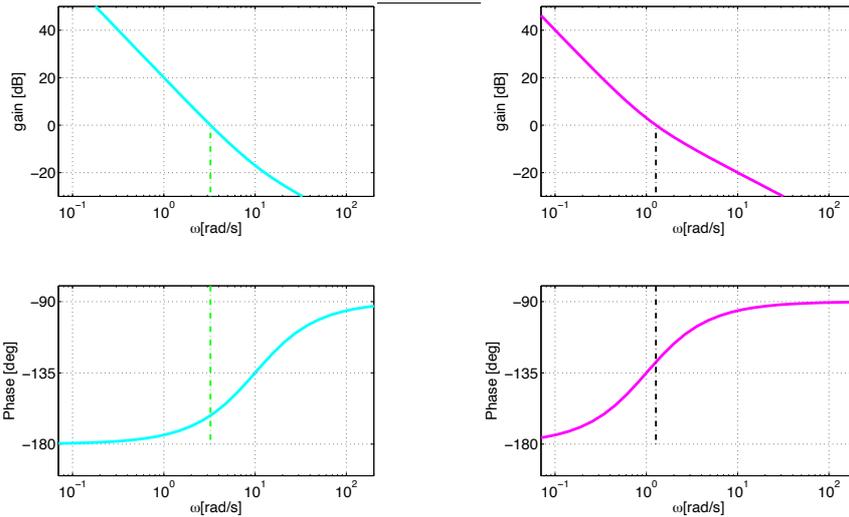
ループ整形の 3 つ目のポイントとして,  $L(s)$  の位相余裕 PM について確認しておこう. 位相余裕 PM は, 13.5.1 節で考えたように, 制御系の安定余裕を教えてくれる大切な値である. 位相余裕 PM が小さい制御系は, Fig. 13.2(c) や 例題 13.9 で考えたように, 実用的ではない応答を示す. 安定な制御系を設計するには, 適切な大きさの位相余裕 PM を確保することが必要である.

**例題 14.4.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s}$  とコントローラ  $C_1(s) = \frac{s+10}{s}$  あるいはコントローラ  $C_2(s) = \frac{s+1}{s}$  からなるフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) を考えよう. Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s) = \frac{s+10}{s^2}$  と  $L_2(s) = P(s)C_2(s) = \frac{s+1}{s^2}$  をそれぞれ Figs. 14.9(a), 14.9(b) に, また Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系のステップ応答を Figs. 14.10(a) 14.10(b) に示す.

Fig. 14.9(a) より,  $L_1(s)$  の位相余裕は  $\text{PM} = 20 \text{ deg}$  程度であることがわかる. 一方  $L_2(s)$  は,  $\text{PM} = 45 \text{ deg}$  程度の位相余裕を持つことが Fig. 14.9(b) から確認できる.

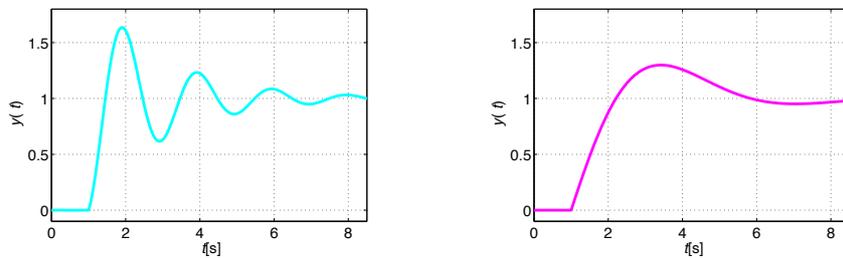
Figs. 14.10(a), 14.10(b) から確認できるように, 位相余裕の小さなフィードバック制御系は振動的な応答を示す. 実用的に安定な制御系を設計するには, 適切な大きさの位相余裕 PM を確保することが必要である.  $\square$

安定な制御系を設計するには, 適切な大きさの位相余裕 PM を確保することが必要である. これをループ整形のポイント ポイント 3 としよう.



(a) ボード線図:  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$     (b) ボード線図:  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$

Fig. 14.9: 位相余裕 PM の異なるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$



(a) ステップ応答:  $C_1(s)$  のとき    (b) ステップ応答:  $C_2(s)$  のとき

Fig. 14.10: 位相余裕 PM の異なるフィードバック制御系: ステップ応答

ポイント 3 安定性:    適切な位相余裕 PM

### 14.2.4 ループ整形のポイント: まとめ

開ループ特性において着目すべきポイントをまとめておこう.

ポイント 1 速応性:    高いゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$

ポイント 2 定常特性:    低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$

ポイント 3 安定性:    適切な位相余裕 PM

ここで例として, Fig. 14.11(a) に典型的な制御対象  $P(s)$  のボード線図を示す. またこの制御対象  $P(s)$  と  $C_0(s) = 1$  により構成されるフィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.12(a) に示す. つぎにこの制御対象  $P(s)$  に適用することが適切と考えられる典型的なコントローラ  $C(s)$  のボード線図, このときの開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s)$  をそれぞれ Figs. 14.11(b), 14.11(c) に示す. さらにこの時のフィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.12(b) に示す.

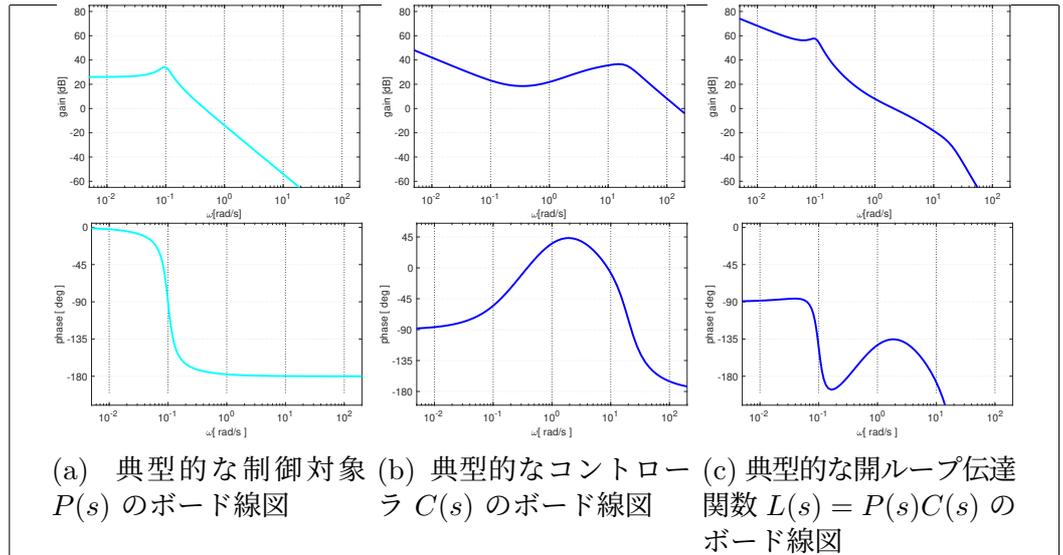


Fig. 14.11: ループ整形法によるフィードバック制御系の設計例: ボード線図

まず始めに Fig. 14.11(a) と Fig. 14.11(c) の開ループ特性を比較し、開ループ特性において着目すべきポイント 1, ポイント 2, ポイント 3 がバランスよく改善されていることを確認して欲しい。つぎに Fig. 14.12(a) と Fig. 14.12(b) のステップ応答を比較し、ポイント 1, ポイント 2, ポイント 3 の改善により、速応性の向上, 定常偏差の除去, 安定性の確保がきちんと実現されていることを確認して欲しい。

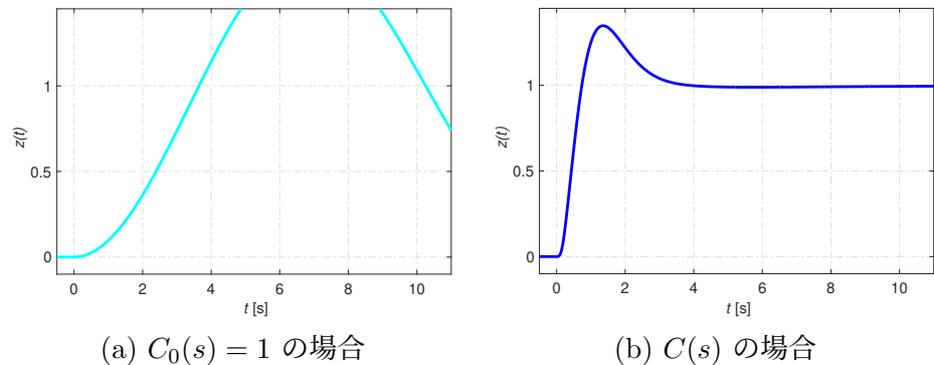


Fig. 14.12: ループ整形法によるフィードバック制御系の設計例: ステップ応答

最後に、Fig. 14.11(a) の制御対象  $P(s)$  のボード線図、この制御対象  $P(s)$  に適用したコントローラ  $C(s)$  のボード線図 Fig. 14.11(b) を見比べ、ボード線図上の単純な足し算で Fig. 14.11(c) の開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s)$  がえられていることを確認して欲しい<sup>2</sup>

ループ整形によるフィードバック制御系の設計では、例えば Fig. 14.11(a) にあるような、あまり望ましくない開ループ特性を、Fig. 14.11(c) にあるような、より望ましい開ループ特性に整形するコントローラ  $C(s)$  の設計をおこな

<sup>2</sup> $P$  と  $C$  の掛け算  $L = PC$  のボード線図は、ボード線図上での足し算で求めることができました。9.4.2 節で確認した内容です。復習しましょう。

う. 具体的なコントローラ的设计手順を 14.3 節で考えよう.

## 14.3 ループ整形法

開ループ特性  $L(s) = P(s)C(s)$  に着目し, 開ループ特性を望ましい形に整形するコントローラ  $C(s)$  の设计手順 (ループ整形法) を考えよう.

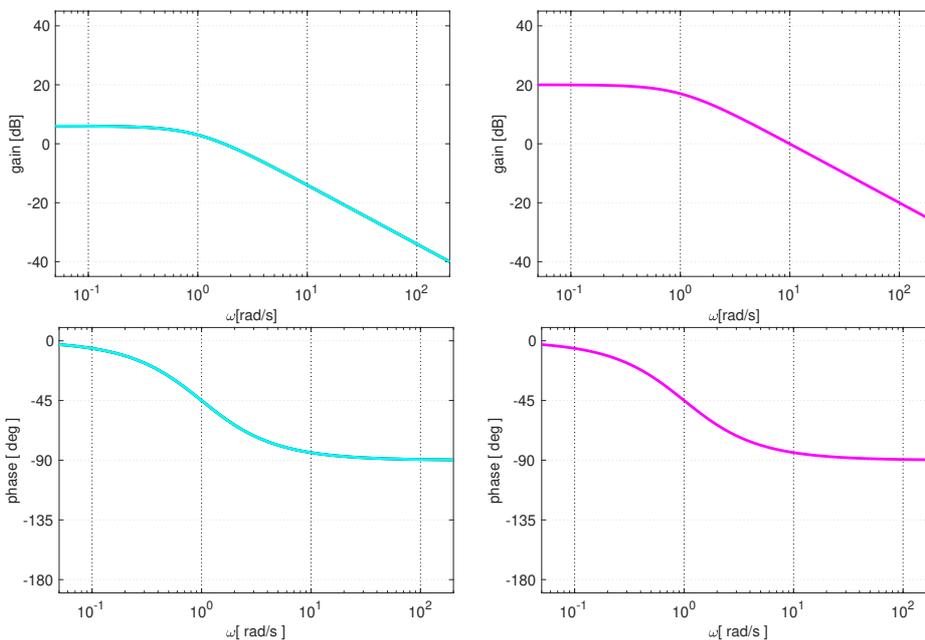
### 14.3.1 ポイント 1 の改善: 比例コントローラ

開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 1 は, 比例コントローラ

$$C(s) = k$$

により改善できる. つぎの例を考えよう.

**例題 14.5.** 制御対象  $P(s) = \frac{2}{s+1}$  と比例コントローラ  $C_0(s) = k_0 = 1$  あるいは比例コントローラ  $C_1(s) = k_1 = 5$  からなるフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) を考えよう. Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L_0(s) = P(s)k_0 = P(s)$  と  $L_1(s) = P(s)k_1 = k_1L_0(s) = 5L_0(s)$  をそれぞれ Figs. 14.13(a), 14.13(b) に, また Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系のステップ応答を Figs. 14.14(a), 14.14(b) に示す.



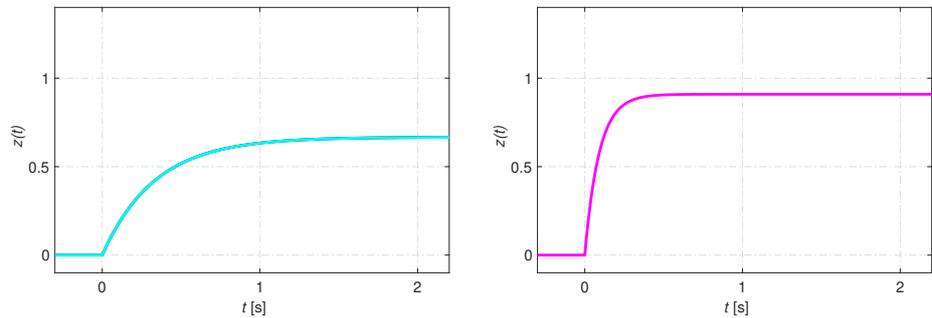
(a) ボード線図  $L_0(s) = P(s)$

(b) ボード線図  $L_1(s) = k_1P(s)$

Fig. 14.13: ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  (バンド幅  $\omega_{bw}$ ) の異なるフィードバック制御系: 開ループ特性  $L(j\omega)$

$L_1(s) = P(s)k_1 = k_1L_0(s)$  であるから,  $|L_1(j\omega)| = k_1|L_0(j\omega)|$  のゲイン線図は,  $|L_0(j\omega)|$  のゲイン線図が  $k_1 = 5$  のぶんだけ押し上げられた形になる.

これにより、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  をより高くすることができる。なおこのとき、 $\angle L_1(j\omega) = \angle(k_1 L_0(j\omega)) = \angle k_1 + \angle L_0(j\omega) = 0 + \angle L_0(j\omega)$  であるから、比例コントローラにより位相特性は変化しないことに注意しよう。



(a) ステップ応答:  $C_0(s) = k_0, k_0 = 1$  のとき  
(b) ステップ応答:  $C_1(s) = k_1, k_1 = 5$  のとき

Fig. 14.14: ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  (バンド幅  $\omega_{bw}$ ) の異なるフィードバック制御系: ステップ応答

Figs. 14.14(a), 14.14(b) から、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  の高い制御系は、速応性に優れていることが確認できる。□

比例コントローラ  $C(s) = k$  によりゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  を高くし、ループ整形のポイント 1 を改善することができる。しかしながら Figs. 14.13(a), 14.13(b) の低周波数ゲインはどちらも定数値に留まっている。これが Figs. 14.14(a), 14.14(b) に定常偏差が生じる理由になっている。定常偏差の減少、あるいは完全な除去には、14.3.2 節で考える位相遅れ (PI) コントローラが活用できる。

なお比例コントローラ  $C(s) = k$  により  $L(s) = P(s)C(s) = kP(s)$  を考えるとき、 $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = k \lim_{s \rightarrow 0} P(s)$  であるから、 $k$  の値を大きくすることは低周波数ゲインの増加、つまり定常偏差の減少にもつながる。実際、Fig. 14.14(b) における定常偏差は、Figs. 14.14(a) の定常偏差よりも小さいことが確認できる。これに関して、つぎの例を考えてみよう。

**例題 14.6.** 制御対象  $P(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$  と比例コントローラ  $C_1(s) = k_1 = 5$  あるいは比例コントローラ  $C_2(s) = k_2 = 50$  からなるフィードバック制御系 Fig. 14.1(a) を考えよう。Fig. 14.1(b) の開ループ特性  $L_1(s) = P(s)k_1$  と  $L_1(s) = P(s)k_2$  をそれぞれ Figs. 14.15(a), 14.15(b) に、また Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系のステップ応答を Figs. 14.16(a), 14.16(b) に示す。

$L_1(s) = P(s)k_2$  では、 $k_2 = 50 > 5 = k_1$  の効果により  $L_1(s)$  よりも高いゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  がえられている。また  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)| > \lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)|$  であり、低周波数ゲインも大きくすることができている。しかしながらそのステップ応答 Fig. 14.16(b) は振動的であり、望ましいものではない。

Fig. 14.16(b) に見られる振動的な応答の原因は、位相余裕 PM の減少つまり安定性の劣化である。実際、Fig. 14.15(a) では  $PM = 40 \text{ deg}$  程度の位相余裕が、Fig. 14.15(b) では  $PM = 10 \text{ deg}$  程度まで減少している。□

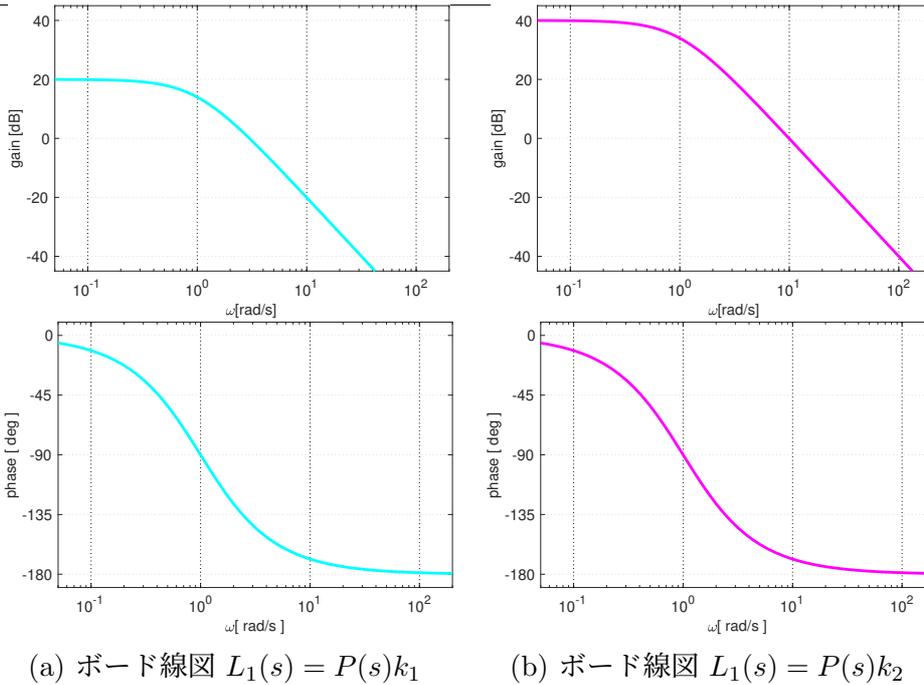


Fig. 14.15: 比例コントローラによる安定性の劣化: 開ループ特性  $L(j\omega)$

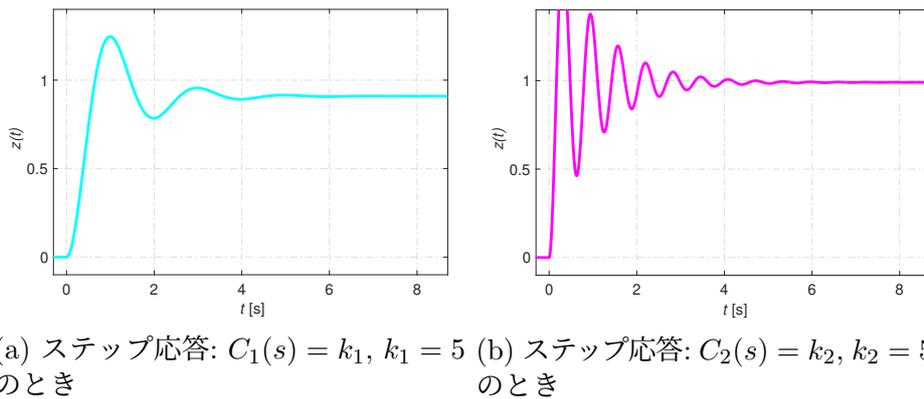


Fig. 14.16: 比例コントローラによる安定性の劣化: ステップ応答

例題 14.6 でも確認したように、比例コントローラの  $C(s) = k$  の値  $k$  を単純に大きくすることは、しばしば安定性の劣化につながる。定常偏差の減少、あるいは完全な除去には、14.3.2 節で考える位相遅れ (PI) コントローラの活用が有効である。また、例えば Fig. 14.15(b) にみられるような高いゲイン交差周波数を維持したまま、減少した位相余裕を回復するには、14.3.3 節で考える位相進みコントローラが活用できる。

### 14.3.2 ポイント 2 の改善: 位相遅れ (PI) コントローラ

開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 2 の改善に役立つ位相遅れコントローラ  $C(s)$  を考えよう。位相遅れコントローラの伝達

関数として

$$C(s) = \frac{s + \omega_1}{s + \omega_2} \quad \omega_1 > \omega_2$$

を考える. 位相遅れコントローラのボード線図を Fig. 14.17 に示す.

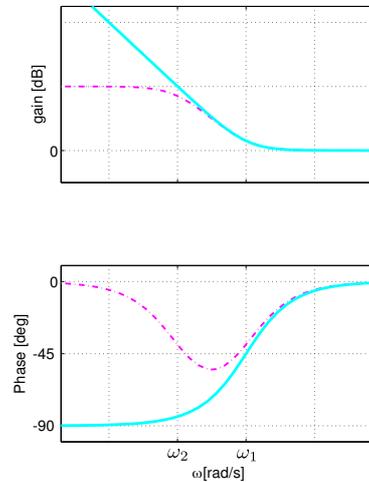


Fig. 14.17: 位相遅れコントローラのボード線図 (実線は  $\omega_2 \rightarrow 0$  とした場合)

Fig. 14.17 の特性から分かるように, 位相遅れコントローラは,  $\omega_2$  [rad/s] から  $\omega_1$  [rad/s] の周波数帯域でゲインを増加させる. とくに  $\omega_2 \rightarrow 0$  とした

$$C(s) = \frac{s + \omega_1}{s}$$

では,  $\omega_1$  [rad/s] より低い周波数帯域でのゲインを 20 [dB/dec] で増加させる. これにより, 開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 2 を改善することができる. しかしながらその一方, ゲインが大きくなる周波数帯域では, 同時に位相を遅らせてしまう.  $\omega_2 \rightarrow 0$  とした場合には,  $\omega = \omega_1$  [rad/s] の点で 45 [deg] の位相遅れを引き起こし,  $\omega \rightarrow 0$  では位相の遅れが 90 [deg] となる.

位相遅れコントローラ  $C(s)$  により, 開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 2 を改善することもできて, 位相余裕 PM を極端に劣化させてはポイント 3 の安定性を損ねてしまう. そこで位相遅れコントローラ  $C(s)$  の設計では, ゲインが上昇を始める周波数  $\omega_1$  [rad/s] をゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  [rad/s] より 1 dec ほど低周波数側にとり, 位相余裕に大きな影響を与えないようにする.

位相遅れコントローラがどのように役立つのか, つぎの例題で確認しよう.

**例題 14.7.** 制御対象  $P(s) = \frac{20}{s^2 + 11s + 10}$  に対するフィードバックコントローラの設計を考えよう. まずはじめに  $L_0(s) = P(s)$ , つまり Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系でコントローラを  $C_0(s) = 1$  とした場合の開ループ特性 Fig. 14.1(b) を Fig. 14.18(a) に示す.

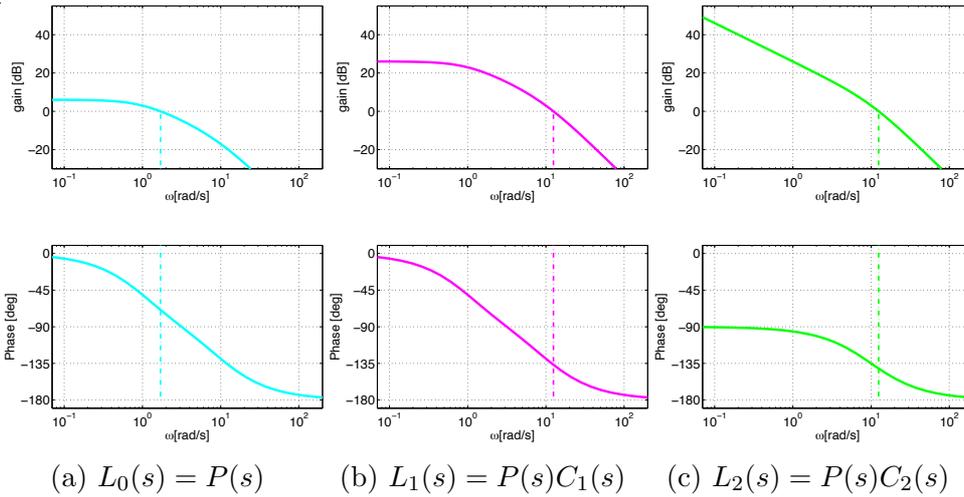


Fig. 14.18: 開ループ伝達関数  $L_0(s)$ ,  $L_1(s)$  と  $L_2(s)$

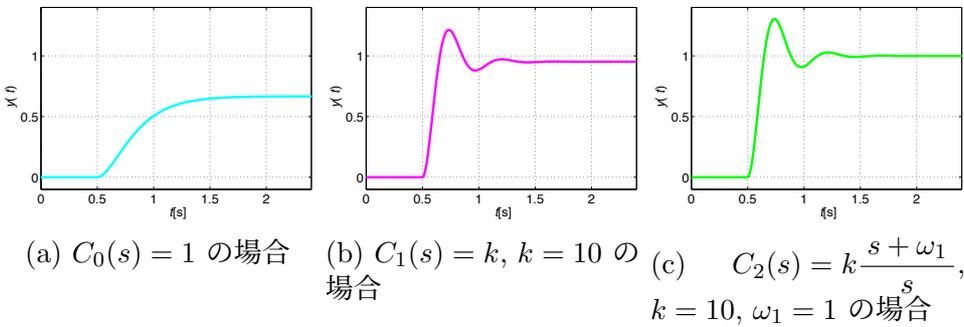


Fig. 14.19: フィードバック制御系のステップ応答

制御対象  $P(s)$  は、十分な位相余裕を有している。一方、低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_0(j\omega)|$  は定数値で留まっている。このためステップ応答には定常偏差が生じる。フィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.19(a) にしめす。

まず、比例コントローラ

$$C_1(s) = k$$

により、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  ( $\approx$  バンド幅  $\omega_{bw}$ ) を高く設定し、速応性を改善しよう。ここで注意すべき点は、ゲイン  $k$  を大きく設定しすぎ位相余裕 PM を損なわないようにすることである。 $C_1(s) = k = 10$  とした場合の開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  を Fig. 14.18(b) に示す。

Fig. 14.18(b) では、位相余裕 PM を十分に確保した上で Fig. 14.18(a) よりゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  が高くなっている。よって速応性の改善が期待される。一方、低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)|$  については、やはり定数値で留まっている。このためステップ応答に対する定常偏差の除去はできない。フィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.19(b) に示す。Fig. 14.19(b) に示すステップ応答は、Fig. 14.19(a) に比較し、立ち上がりが早くなっている。また、位相余裕も十分に確保されているので、振動的な振舞いは生じていない。

Fig. 14.19(b) に見られる定常偏差を除去するには、位相遅れコントローラ

により低周波ゲインを大きくする必要がある。そこでコントローラ

$$C_2(s) = C_1(s) \frac{s + \omega_1}{s} = k \frac{s + \omega_1}{s} = 10 \frac{s + \omega_1}{s}$$

(位相遅れコントローラの定義で  $\omega_2 = 0$  とした場合) を考える。ゲインが大きくなり始める周波数  $\omega_1$  [rad/s] の設定で注意すべき点は、 $\omega_1$  [rad/s] 付近から位相が遅れ始めるため、これが位相余裕 PM に大きな影響を与えないようにすることである。そこで Fig. 14.18(b) でのゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  より  $\omega_1$  の値を 1 dec ほど低周波域に取り  $\omega_1 = 1$  rad/s とする。  $C_2(s) = 10 \frac{s+1}{s}$  とした場合の開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  を Fig. 14.18(c) に示す。

Fig. 14.18(c) では、位相遅れコントローラの効果により、低周波数域でのゲインが 20 dB/dec で増加し  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_2(j\omega)| = \infty$  を達成している。これにより、Fig. 14.19(b) に見られた定常偏差を除去できる。なおここで、Fig. 14.18(b) と Fig. 14.18(c) を比較し、 $\omega_1 = 1$  rad/s 付近からゲインが増加していること、同じく  $\omega_1 = 1$  rad/s 付近から位相が遅れていること、さらに Fig. 14.18(c) の位相余裕 PM が、Fig. 14.18(b) からほとんど影響を受けていないこと、を確認しておこう。

フィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.19(c) に示す。Fig. 14.19(c) では、Fig. 14.19(b) に見られた定常偏差が除去されている。 □

### 14.3.3 ポイント 3 の改善: 位相進みコントローラ

開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 3 の改善に役立つ位相進みコントローラ  $C(s)$  を考えよう。位相進みコントローラの伝達関数として

$$C(s) = \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4}} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3} \quad \omega_3 > \omega_4$$

を考える。位相進みコントローラのボード線図を Fig. 14.20 に示す。

位相進みコントローラは、 $\omega_4$  [rad/s] から  $\omega_3$  [rad/s] の周波数帯域で位相を進めることができる。これにより位相余裕 PM を引き上げ、開ループ伝達関数  $L(s)$  の特性において注目すべきポイント 3 を改善することができる。一方、位相が進む帯域では、同時にゲインの増加が生じる。

位相がもっとも進む周波数  $\omega_{\max}$  は、 $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_3 \omega_4}$  [rad/s] で与えられ<sup>3</sup>、 $\omega_3$  と  $\omega_4$  の相乗平均になっている<sup>4</sup> また位相進みコントローラにより進められる位相の最大値は、 $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 10$  の場合は 55 [deg] 程度 (Fig. 14.21(a) 参照)、 $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 5$  の場合は 40 [deg] 程度 (Fig. 14.21(b) 参照)、 $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 2$  の場合は 20 [deg] 程度 (Fig. 14.21(c) 参照) となる。なお  $\omega_3 \rightarrow \infty$  とすれば、位相進

<sup>3</sup>  $\frac{d\angle C(j\omega)}{d\omega} = 0$  を計算し、 $\omega_{\max}$  が  $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_3 \omega_4}$  で与えられることを確認してみよう。  
<sup>4</sup>  $\omega_{\max}$  は、ボード線図上で  $\omega_3$  と  $\omega_4$  の真ん中の値になっています。実際、ボード線図の横軸は対数をとっていることに注意して、 $\log \omega_{\max} = \frac{\log \omega_3 + \log \omega_4}{2} = \frac{\log \omega_3 \omega_4}{2} = \log \sqrt{\omega_3 \omega_4}$  より、 $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_3 \omega_4}$  が  $\omega_3$  と  $\omega_4$  のボード線図上での真ん中の値になっていることが確認できます。

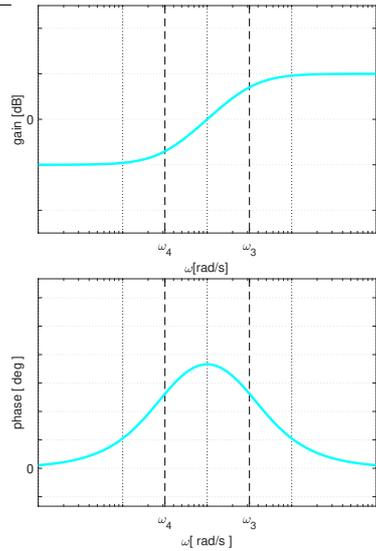
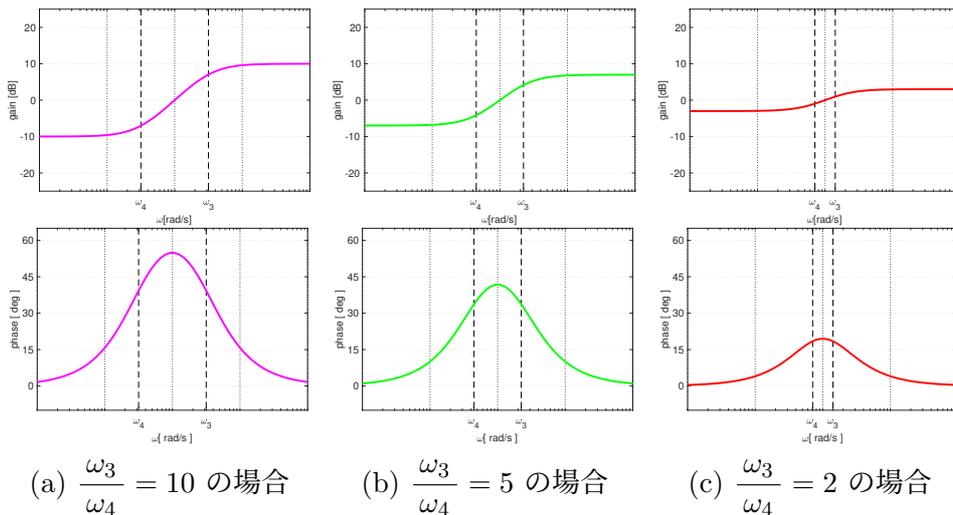


Fig. 14.20: 位相進みコントローラのボード線図

みの最大値を 90 [deg] とできるが、このように  $\omega_3$  [rad/s] の値を極端に大きくした設計を採用することは、ほとんどない。



(a)  $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 10$  の場合      (b)  $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 5$  の場合      (c)  $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 2$  の場合

Fig. 14.21: 位相進みコントローラのボード線図

極端に大きな  $\omega_3$  [rad/s] が望まれない理由を、センサーノイズを例に挙げ、考えておこう。実際のフィードバック制御系では、制御対象にセンサーが取り付けられ、フィードバックに必要な出力  $z(t)$  の値を観測する。多くのセンサーが、十分に実用的な周波数帯域で  $z(t)$  の値を精度良く測定してくれる。一方、高い周波数帯域では、観測ノイズと呼ばれる望ましくない信号を含む場合がある。仮に  $\omega_3$  [rad/s] の値を極端に大きくした位相進みコントローラを設計したとすると、高い周波数帯域まで開ループ伝達関数のゲイン  $|L(j\omega)|$  を 20 rad/dec で上昇させてしまう。観測ノイズが発生している周波数帯域で開ループ伝達関数のゲイン  $|L(j\omega)|$  が大きくなっていると、観測ノイズを十分に減衰させることができず、ノイズに敏感なフィードバック制御系になってしまう。このため、高周波数帯域  $\omega \gg \omega_{gc}$  では  $|L(j\omega)|$  の大きさが速やかに小

さくなっていること、がより実用的なフィードバック制御系の設計には求められる。これが、極端に大きな  $\omega_3$  [rad/s] の値が望まれない一つの理由である。なお高周波数帯域での  $|L(j\omega)|$  速やかな減衰は、フィードバック制御系のロバスト性向上にも重要な役割を果たす<sup>5</sup>。観測ノイズの影響低減やフィードバック制御系のロバスト性向上を達成するより実用的な制御系には、高周波数帯域での  $|L(j\omega)|$  速やかな減衰が求められる。これをループ整形のポイント4としよう。

ポイント4より実用的な制御系: 高周波数帯域  $\omega \gg \omega_{gc}$  での  $|L(j\omega)|$  速やかな減衰

位相進みコントローラがどのように役立つのか、つぎの例題で確認しよう。

**例題 14.8.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  に対するフィードバックコントローラの設計を考えよう。ただしここでは、フィードバック制御系のバンド幅  $\omega_{bw}$  ( $\approx$  ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ ) を 10 rad/s 程度とし、位相余裕  $PM = 45$  deg 以上を確保するという設計仕様を想定しよう。はじめに Fig. 14.1(a) でコントローラを  $C_0(s) = 1$  とした場合の開ループ特性  $L_0(s) = P(s)$  を Fig. 14.22(a) に、フィードバック制御系 Fig. 14.1(a) のステップ応答を Fig. 14.23(a) に示す。

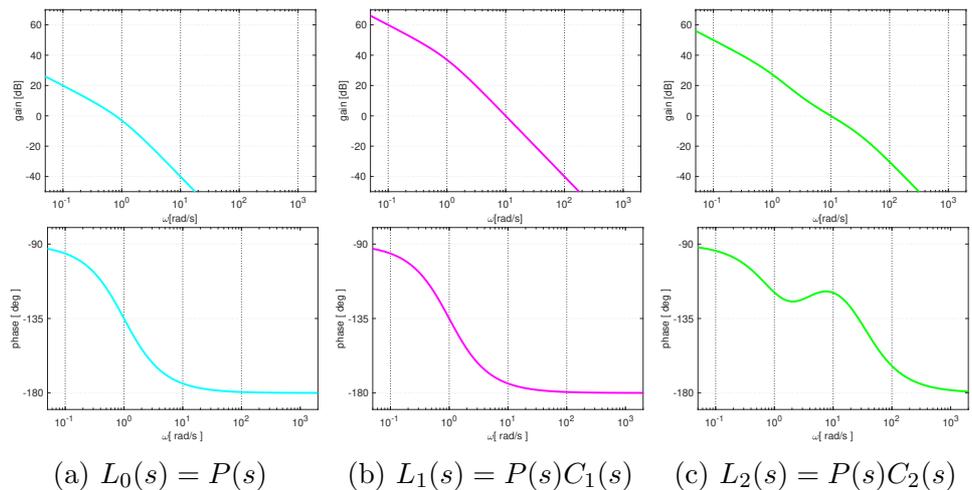


Fig. 14.22: 開ループ伝達関数  $L_0(s)$ ,  $L_1(s)$  と  $L_2(s)$

制御対象  $P(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  は 1 rad/s 未満となっている。そこでまず比例コントローラ

$$C_1(s) = k$$

により、ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  を引き上げよう。  $k = 100$  とした場合の開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  を Fig. 14.22(b) に示す。コントローラ  $C_1(s)$  により、開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のゲイン交差周波数は  $\omega_{gc} = 10$  rad/s 程度に引き上げられている。しかしながら同時に、位相余裕  $PM$  が 10 deg 未満に減少してしまっている。 Fig. 14.23(b) に示すステップ応答が振動的なのは、この小さな位相余裕  $PM$  が原因である。

<sup>5</sup>制御系のロバスト性については、杉江、藤田、フィードバック制御入門、コロナ社、1999。などが、よい入門書になっています。

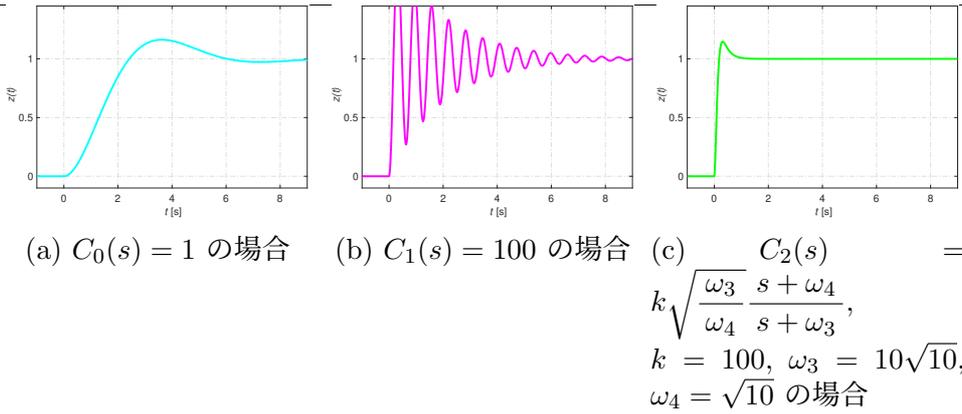


Fig. 14.23: ステップ応答

Fig. 14.22(b) で小さくなってしまった位相余裕 PM を, 位相進みコントローラにより適切な値まで大きくしよう. 位相進みコントローラ

$$C_2(s) = C_1(s)\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}} = 100\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}}$$

を考え,  $\omega_3 = 10\sqrt{10}, \omega_4 = \sqrt{10}$  とした場合の開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  を Fig. 14.22(c) に, またフィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.23(c) に示す.

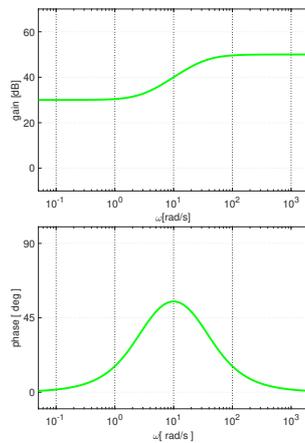


Fig. 14.24: 位相進みコントローラ  $C(s) = k\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}}$ ,  $k = 100, \omega_3 = 10\sqrt{10}, \omega_4 = \sqrt{10}$  のボード線図

Fig. 14.22(c) では, 位相進みコントローラにより,  $\omega_4 = \sqrt{10} \approx 3.16$  rad/s から  $\omega_3 = 10\sqrt{10} \approx 31.6$  rad/s の周波数帯域で位相が進められ, PM = 45 deg 以上の位相余裕が確保されている. またゲイン高周波数も  $\omega_{gc} \approx 10$  rad/s となっている. Fig. 14.23(c) では, 適切に確保された位相余裕 PM により, Fig. 14.23(b) に現れた振動的な振る舞いがなくなっている. なおここでは, 位相がもっとも進む周波数  $\omega_{max} = \sqrt{\omega_3\omega_4}$  をゲイン交差周波数  $\omega_{gc} = 10$  rad/s に一致させる条件

$$\sqrt{\omega_3\omega_4} = 10$$

と位相進みの最大値を 55 deg 程度にする条件

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = 10$$

の 2 つから,  $\omega_3 = 10\sqrt{10}$ ,  $\omega_4 = \sqrt{10}$  を定めている.

最後に, 位相進みコントローラ  $C_2(s)$  のボード線図を Fig. 14.24 に示しておこう. Fig. 14.22(a) の制御対象  $P(s)$  と Fig. 14.24 のコントローラ  $C_2(s)$  をボード線図上で足し算したものが, Fig. 14.22(c) の開ループ特性  $L_2(s)$  である. これらをよく見比べ, 単純な足し算で開ループ特性  $L_2(s)$  が決まっていることを確認しよう.  $\square$

### 14.3.4 位相遅れ・進みコントローラによるフィードバック制御系の設計

ループ整形によるフィードバック制御系の設計では, 注目すべきポイント 1, ポイント 2, ポイント 3, ポイント 4 に注意し, 比例コントローラ, 位相遅れコントローラ, 位相進みコントローラを, 場合によっては複数個, つなぎ合わせ, 開ループ特性  $L(s)$  を望ましい形に整形していく. ここでは, ループ整形によるフィードバック制御系の設計手順を, 例題により確認しよう.

Fig. 14.11(a) で典型的な制御対象として示した  $P(s)$  に対するフィードバック制御系の設計を考えよう. この制御対象  $P(s)$  の伝達関数は

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = 0.1 \quad \zeta = 0.2 \quad K = 20$$

で与えられる. Fig. 14.1(a) のフィードバック制御系で  $C_0(s) = 1$  とした場合の開ループ特性  $L_0(s) = P(s)C_0(s) = P(s)$  が Fig. 14.11(a) となる. またこの時のフィードバック制御系のステップ応答は Fig. 14.12(a) であった.

まずはじめに, 比例コントローラ

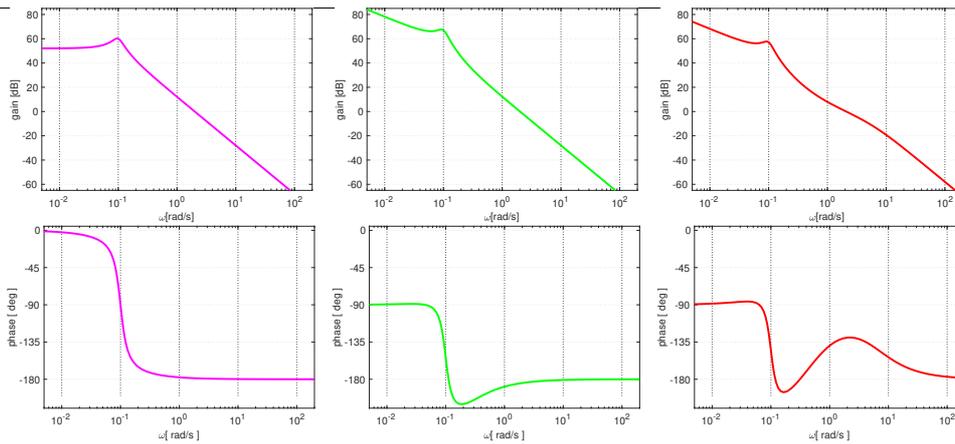
$$C_1(s) = k \quad k = 20$$

によりゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  ( $\approx$  バンド幅  $\omega_{bw}$ ) を引き上げ, 速応性を向上させよう.  $k = 20$  とした場合の開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s) = kP(s)$  を Fig. 14.25(a) に示す.

Fig. 14.25(a) では, Fig. 14.11(a) におけるゲイン交差周波数 0.5 rad/s 程度が 2 rad/s 程度まで引き上げられている. しかしながら低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L_1(j\omega)|$  は定数値に留まっており, 位相余裕 PM もほぼ 0 deg である. そこでつぎに, ゲインが上がり始める周波数  $\omega_1$  をゲイン交差周波数  $\omega_{gc} = 2$  rad/s の 1 dec ほど低周波数側にとり, 位相遅れコントローラ

$$C_2(s) = C_1(s) \frac{s + \omega_1}{s} = k \frac{s + \omega_1}{s} \quad \omega_1 = 0.2$$

により, 低周波ゲインを増加させよう. 開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  を Fig. 14.25(b) に示す.



(a)  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のボード線図 (b)  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  のボード線図 (c)  $L_3(s) = P(s)C_3(s)$  のボード線図

Fig. 14.25: 開ループ特性  $L_1(s)$ ,  $L_2(s)$  と  $L_3(s)$

つぎに位相進みコントローラ

$$C_3(s) = C_2(s) \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4}} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3} = k \frac{s + \omega_1}{s} \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4}} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3} \quad \omega_3 = 6 \quad \omega_4 = 0.6$$

により, 適切な位相余裕 PM を確保しよう. 開ループ特性  $L_3(s) = P(s)C_3(s)$  を Fig. 14.25(c) に示す. なおここでは, 位相がもっとも進む周波数をゲイン交差周波数に一致させ  $\sqrt{\omega_3\omega_4} = \omega_{gc} = 2 \text{ rad/s}$ , 位相進みの最大値を 55 deg 程度にする  $\frac{\omega_3}{\omega_4} = 10$ , の二つの条件により,  $\omega_3 = 6, \omega_4 = 0.6$  を定めている.

Fig. 14.11(a) に示す制御対象  $P(s)$  のボード線図と Fig. 14.25(c) の  $L_3(s) = P(s)C_3(s)$  を比較し, ループ整形法において注目すべきポイント 1, ポイント 2, ポイント 3 がバランス良く向上していることを確認して欲しい. Fig. 14.26 に示すフィードバック制御系のステップ応答では, 速応性が改善され定常偏差も生じていない. また適切な位相余裕 PM が確保された安定なフィードバック制御系になっている.

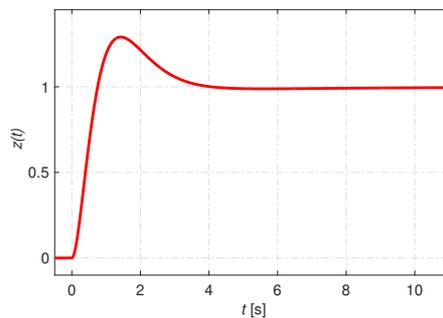


Fig. 14.26: フィードバック制御系のステップ応答,  $C_3(s) = k \frac{s + \omega_1}{s} \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4}} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}$ ,  $k = 20, \omega_1 = 0.2, \omega_3 = 6, \omega_4 = 0.6$  の場合

**matlab note 14.1.** Fig. 14.25 のボード線図と Fig. 14.26 のステップ応答は, 例えば

```

1: %%%% plant
2: K = 20; zeta = 0.2; omegan = 0.1;
3: sys_p = tf( [ K * omegan^2 ], ...
4:             [ 1 ( 2 * zeta * omegan ) omegan^2 ] );
5: %%%% proportional control
6: k = 20;
7: sys_pro = k;
8: sys_c01 = sys_pro; sys_l01 = sys_p * sys_c01;
9: %%%% lag (PI) control
10: omega01 = 0.2;
11: sys_lag = tf( [ 1 omega01 ], [ 1 0 ] );
12: sys_c02 = sys_c01 * sys_lag; sys_l02 = sys_p * sys_c02;
13: %%%% lead control
14: omega03 = 6; omega04 = 0.6;
15: sys_lea = ( sqrt( omega03 / omega04 ) ) * ...
16:           tf( [ 1 omega04 ], [ 1 omega03 ] );
17: sys_c03 = sys_c02 * sys_lea; sys_l03 = sys_p * sys_c03;
18: %%%% bode diagram
19: figure( 'name', 'bode diagram' );
20: bode( sys_p, sys_l01, sys_l02, sys_l03 )
21: %%%% step response
22: sys_t = feedback( sys_l03, 1 );
23: figure( 'name', 'step response' );
24: step( sys_t )

```

のように確認できる<sup>6</sup>. □

最後に、14.3.3 節で説明したループ整形法において注目すべきポイント 4 について考えてみよう. このために、観測ノイズ  $n$  が混入する Fig. 14.27 のフィードバック制御系を考える.

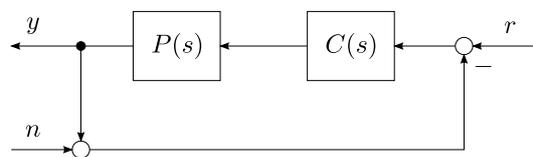
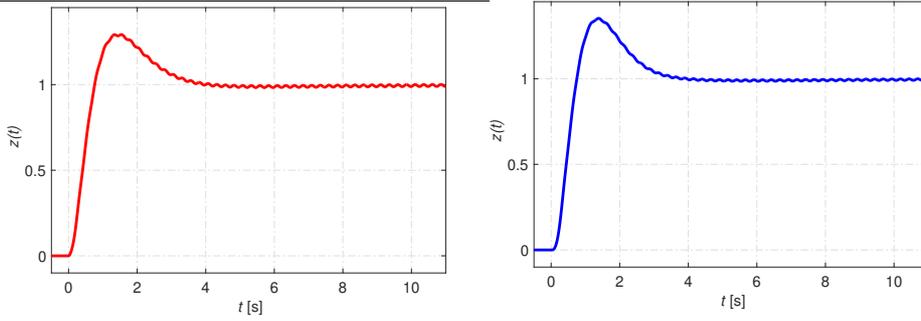


Fig. 14.27: 観測ノイズが混入する制御系

Fig. 14.27 のフィードバック制御系では、制御対象  $P(s)$  からの出力  $z$  ではなく、これに観測ノイズが加わった  $z+n$  がフィードバックされ、コントローラ  $C(s)$  への入力となる. とくにここでは、観測ノイズの特性が  $n(t) = A_s \sin \omega_s t$ ,  $A_s = 0.3$ ,  $\omega_s = 25$  [rad/s] であったとしよう. 制御対象  $P(s)$ , コントローラ  $C_3(s)$  からなるフィードバック制御系に、観測ノイズ  $n$  が混入した場合のステップ応答を Fig. 14.28(a) に示す. 観測ノイズ  $n$  が出力  $z$  に与える影響を確認することができる.

<sup>6</sup>% で始まると文は、コメント文です.



(a)  $C_3(s) = k \frac{s + \omega_1}{s} \frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}$ , (b)  $C_4(s) = k \frac{s + \omega_1}{s} \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_4}} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3} \frac{\omega_5^2}{s^2 + 2\zeta_5\omega_n s + \omega_5^2}$ ,  
 $k = 20, \omega_1 = 0.2, \omega_3 = 6, \omega_4 = 0.6$  の場合  
 $\omega_5 = 20, \zeta_5 = 0.5$  の場合

Fig. 14.28: 観測ノイズが混入する場合のステップ応答

観測ノイズ  $n$  の影響を受けにくいフィードバック制御系を構成するには、観測ノイズの存在する周波数帯域  $\omega_s = 25$  [rad/s] 付近で開ループ特性のゲインが速やかに減衰している必要がある。そこで  $\omega_5$  [rad/s] 以上の周波数帯域でゲインを減衰させる

$$C_4(s) = C_3(s) \frac{\omega_5^2}{s^2 + 2\zeta_5\omega_n s + \omega_5^2} \quad \omega_5 = 20 \quad \zeta_5 = 0.5$$

を新たなコントローラとしよう。開ループ特性  $L_4(s) = P(s)C_4$  は Fig. 14.11(c) となる。Fig. 14.25(c) と Fig. 14.11(c) を比較し、 $\omega_5$  [rad/s] 付近からより急峻にゲインが減衰し、ポイント 4 が改善されていること、またゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  や位相余裕 PM が大きな影響を受けていないことを確認して欲しい。観測ノイズ  $n$  が混入した場合のフィードバック制御系のステップ応答を Fig. 14.28(b) に示す。コントローラ  $C_4(s)$  は、観測ノイズ  $n$  の影響を十分に減衰させることができている。なお、コントローラ  $C_4(s)$  のボード線図が、Fig. 14.11(b) である。ここでもう一度、Fig. 14.11(a) と Fig. 14.11(b) の単純な足し算が、Fig. 14.11(c) となっていることを確認して欲しい。

第 14 章のまとめ

- ループ整形法のポイント
  - ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , バンド幅  $\omega_{bw}$ : 速応性
  - 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)|$ : 定常特性
  - 位相余裕 PM: 安定性
- 位相遅れコントローラを理解しよう
- 位相進みコントローラを理解しよう

## 14.4 演習問題

演習問題 14.1. 制御対象  $P(s) = \frac{1}{10(s+1)^2}$  に対するフィードバックコントローラの設計を考えよう. 開ループ特性  $L_0(s) = P(s)$  を Fig. 14.29(a) に, 対応するフィードバック制御系のステップ応答  $y_0(t)$  を Fig. 14.30(a) に示す.

1.  $L_0(s)$  の低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_0(j\omega)$  を読み取りなさい.

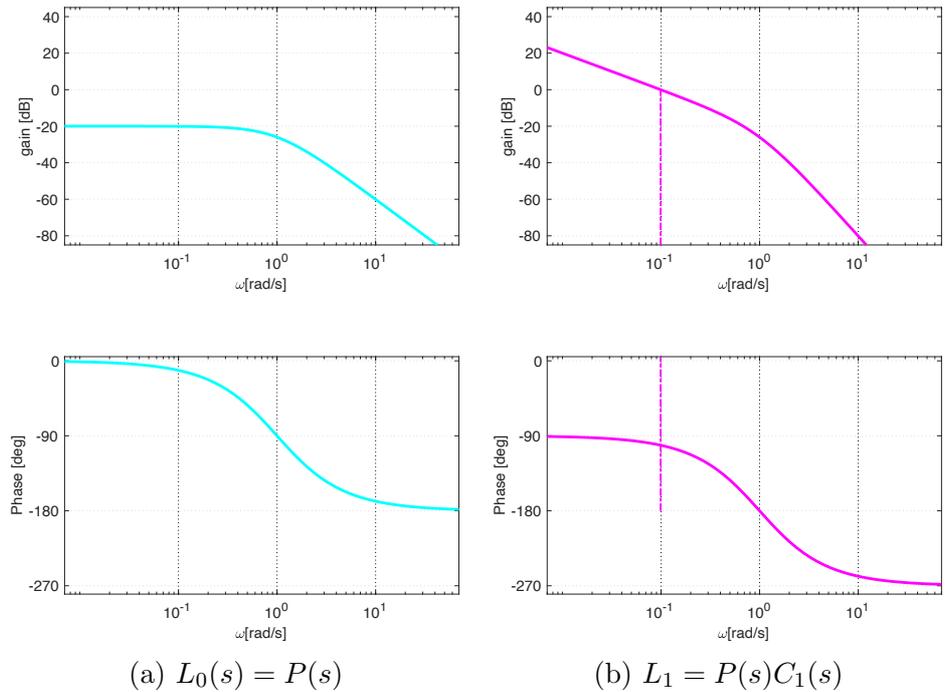


Fig. 14.29: 開ループ特性  $L_0(s)$  と  $L_1(s)$

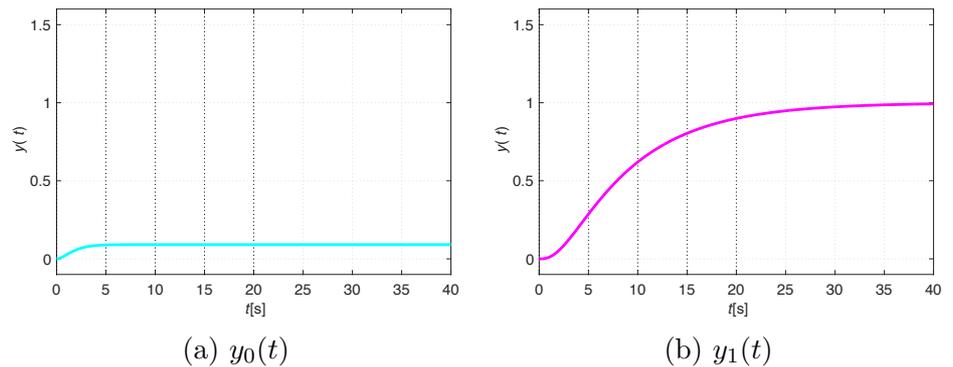


Fig. 14.30: フィードバック制御系のステップ応答

コントローラ  $C_1(s)$  として, I 制御コントローラ  $C_1(s) = \frac{1}{s}$  を考える. 開ループ特性  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  を Fig. 14.29(b) に, 対応するステップ応答  $y_1(t)$  を Fig. 14.30(b) に示す.

2.  $L_1(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_1(j\omega)$  を読み取りなさい.

3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 1$  であるのに対して、 $y_0(t)$  には定常偏差が生じている。この理由を Fig. 14.29 の開ループ特性の違いにもとづき説明しなさい。

$C_1(s)$  にゲイン補償を加え I 制御コントローラ  $C_2(s) = 10 \times C_1(s)$  を新たなコントローラとする。開ループ特性  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  を Fig. 14.31(a) に、対応するステップ応答  $y_2(t)$  を Fig. 14.32(a) に示す。

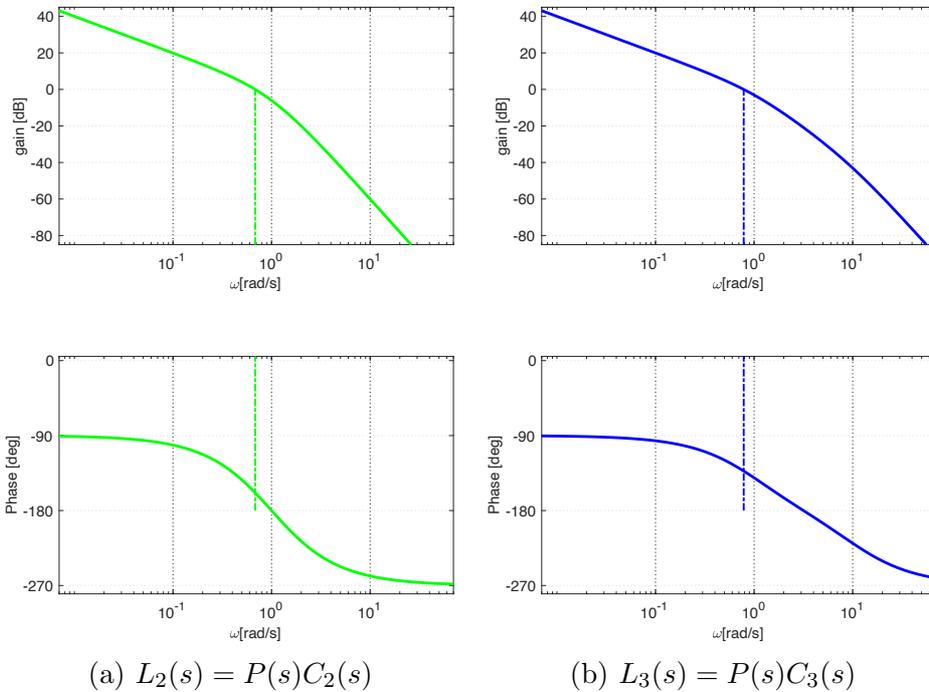


Fig. 14.31: 開ループ特性  $L_2(s)$  と  $L_3(s)$

4.  $L_2(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_2(j\omega)$  を読み取りなさい。
5.  $y_1(t)$  と  $y_2(t)$  を比較すると、 $y_2(t)$  の方が速応性に優れている。この理由を  $L_1(s)$  と  $L_2(s)$  の開ループ特性の違いにもとづき説明しなさい。
6.  $y_1(t)$  と  $y_2(t)$  を比較すると、 $y_2(t)$  の方が振動的である。フィードバック制御系の安定性が劣化した理由を  $L_1(s)$  と  $L_2(s)$  の開ループ特性の違いにもとづき説明しなさい。

さらに位相進みコントローラを加え  $C_3(s) = \frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3} \times C_2(s)$ ,  $\omega_3 = 10$ ,  $\omega_4 = 1$  を新たなコントローラとする。開ループ特性  $L_3(s) = P(s)C_3(s)$  を Fig. 14.31(b) に、対応するステップ応答  $y_3(t)$  を Fig. 14.32(b) に示す。

7.  $L_3(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波数ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_3(j\omega)$  を読み取りなさい。
8.  $y_2(t)$  と  $y_3(t)$  を比較すると、コントローラ  $C_3(s)$  によりフィードバック制御系の安定性が改善され、 $y_2(t)$  に見られた振動的な振る舞いが抑制さ

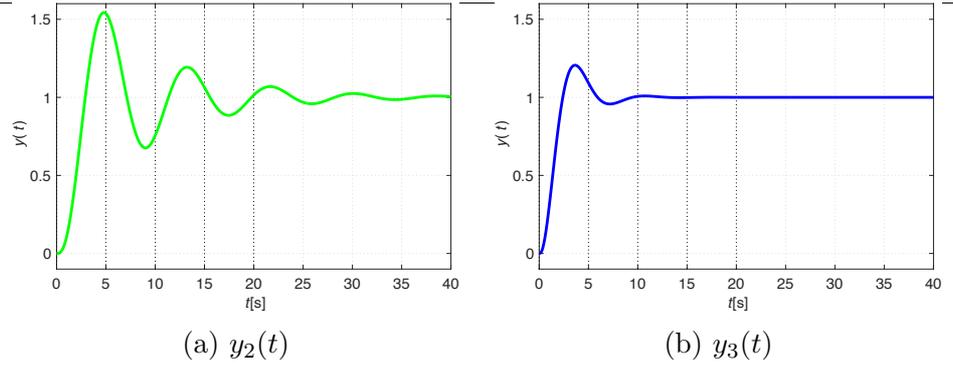


Fig. 14.32: フィードバック制御系のステップ応答

れている。フィードバック制御系の安定性が改善された理由を Fig. 14.31 の開ループ特性の違いにもとづき説明しなさい。

**演習問題 14.2.** 制御対象  $P(s) = \frac{10}{s+1}$  に対するフィードバック制御系の設計を考えよう。ここでは  $C_1(s) = 1$ ,  $C_2(s) = 10$  の二つのコントローラを考える。

1. 開ループ伝達関数  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似) を Fig. 14.33(a) に示す。開ループ伝達関数  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似でよい) を Fig. 14.33(b) に記入しなさい。

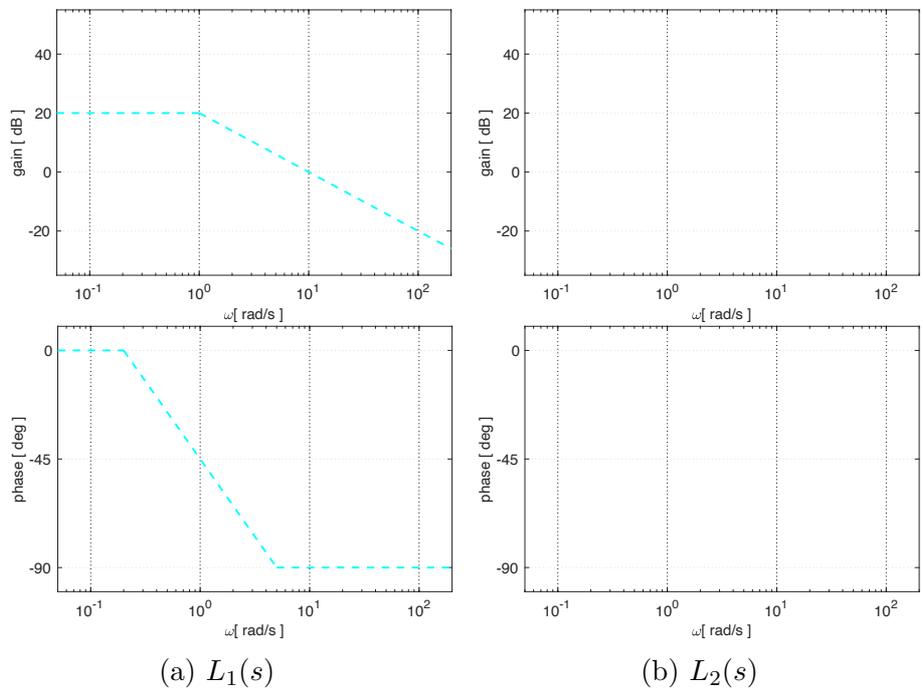


Fig. 14.33: ボード線図

2.  $L_1(s)$ ,  $L_2(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  をそれぞれ読み取りなさい。

3.  $C_1(s), C_2(s)$  を適用した場合のフィードバック制御系のステップ応答は、それぞれ Fig. 14.34 のどちらかで与えられる.  $C_1(s), C_2(s)$  とステップ応答の正しい組み合わせを答えなさい.

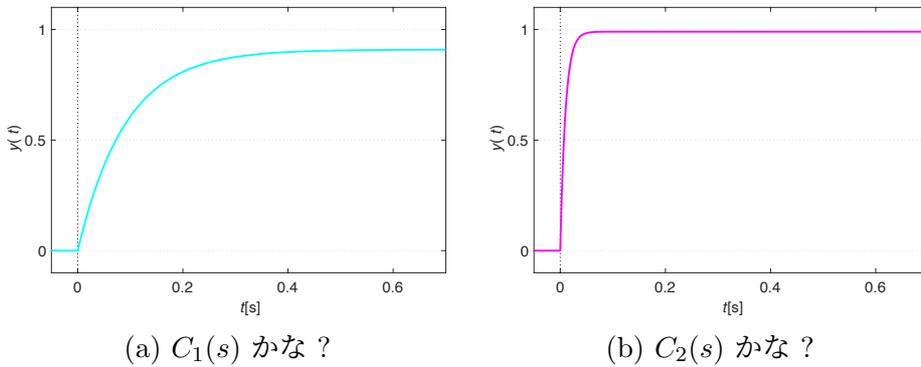


Fig. 14.34: ステップ応答

**演習問題 14.3.** 制御対象  $P(s) = \frac{1}{s+1}$  に対するフィードバック制御系の設計を考えよう.  $P(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似) を Fig. 14.35(a) に示す.

1.  $C_1(s) = 10$  の P 制御コントローラを考える. 開ループ伝達関数  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似でよい) を Fig. 14.35(a) に記入しなさい.

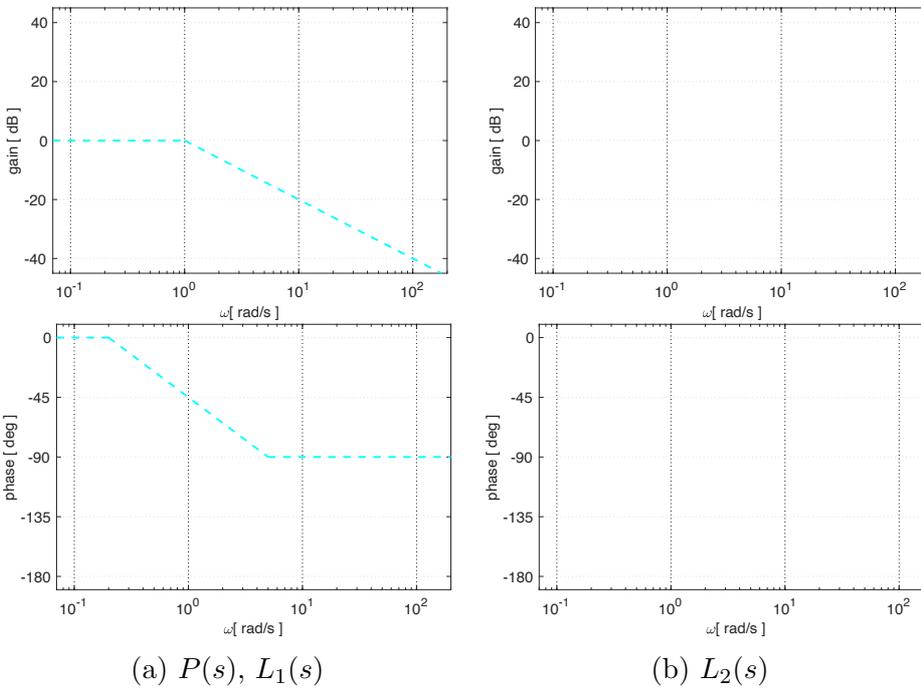


Fig. 14.35: ボード線図

2.  $L_1(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_1(j\omega)$  を読み取りなさい.

つぎに、コントローラ  $C_2(s)$  として、積分補償器  $\frac{1}{s}$  を加え、I 制御コントローラ  $C_2(s) = C_1(s) \times \frac{1}{s}$  を考える。

- 開ループ伝達関数  $L_2(s) = P(s)C_2(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似でよい) を Fig. 14.35(b) に記入しなさい。
- $L_2(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_2(j\omega)$  を読み取りなさい。

さらに位相進みコントローラ  $\frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}$ ,  $\omega_3 = 10$ ,  $\omega_4 = 1$  を加え, 新たなコントローラ  $C_3(s) = C_2(s) \times \frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}$  を考える。位相進みコントローラ  $\frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{s + \omega_4}{s + \omega_3}$ ,  $\omega_3 = 10$ ,  $\omega_4 = 1$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似) を Fig. 14.36(a) に示す。

- 開ループ伝達関数  $L_3(s) = P(s)C_3(s)$  のボード線図 (ゲイン線図, 位相線図共に折れ線近似でよい) を Fig. 14.36(b) に記入しなさい。

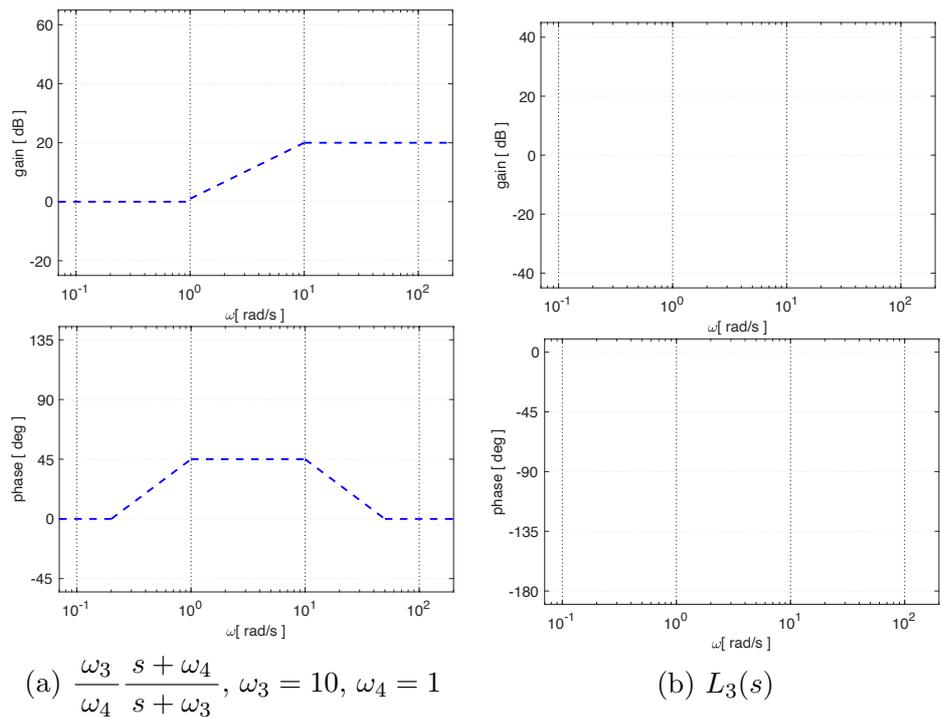


Fig. 14.36: ボード線図

- $L_3(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$ , 位相余裕 PM, 低周波ゲイン  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_3(j\omega)$  を読み取りなさい。
- $C_1(s)$ ,  $C_2(s)$ ,  $C_3(s)$  を適用した場合のフィードバック制御系のステップ応答は, それぞれ Fig. 14.37 のいずれかで与えられる。  $C_1(s)$ ,  $C_2(s)$ ,  $C_3(s)$  とステップ応答の正しい組み合わせを答えなさい。

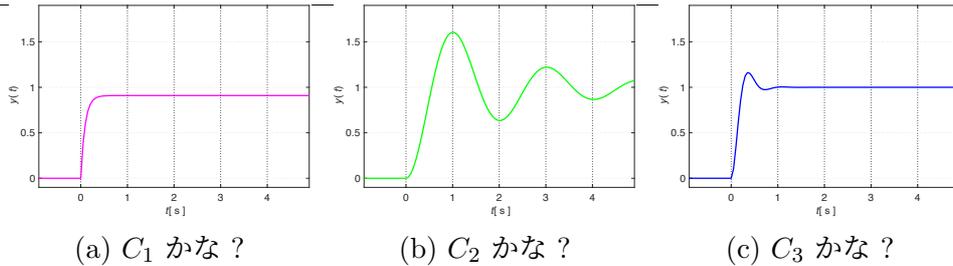


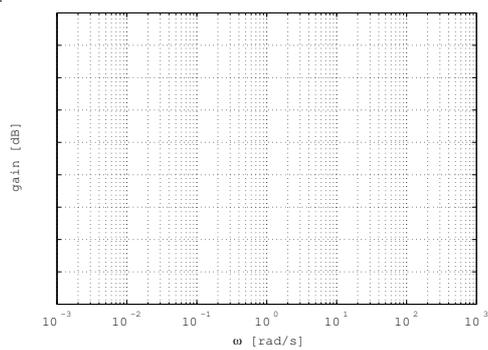
Fig. 14.37: ステップ応答

## 演習問題 14.4.

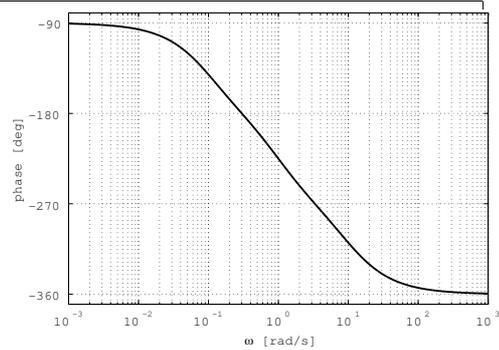
つぎの制御対象  $P(s)$  に対して, PD (位相進み) 補償器  $K_{PD}(s) = K_P(1 + s)$  を設計する. 以下の問いに答えなさい.

$$P(s) = \frac{10}{s(10 + s)(1 + s)(1 + 10s)}$$

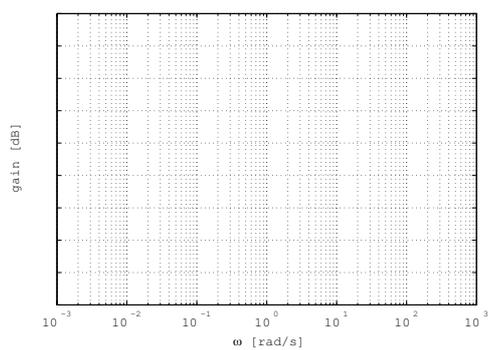
1.  $P(s)$  のゲイン線図を, 折れ線近似により, 指定欄に描きなさい.
2.  $K_P = 1$  とする.  $K_{PD}(s)$  のゲイン線図を, 折れ線近似により, 指定欄に描きなさい.
3.  $K_P = 1$  とする. 開ループ伝達関数  $L(s) = P(s)K_{PD}(s)$  のゲイン線図を, 折れ線近似により, 指定欄に描きなさい.
4. この制御系が安定となるゲイン  $K_P (> 0)$  の範囲を, その理由を述べた上で, 判定しなさい.



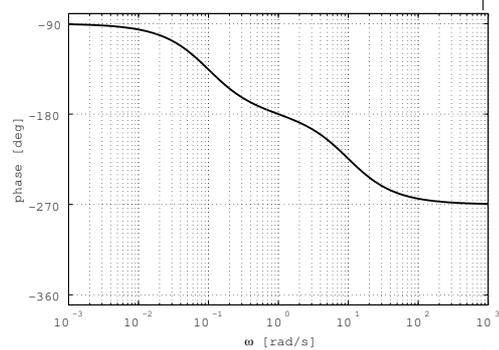
$P(s), K_{PD}(s)$  のゲイン線図



$P(s)$  の位相線図



$L(s)$  のゲイン線図



$L(s)$  の位相線図

## 14.5 演習問題 サンプル解答

演習問題サンプル解答 14.1. 1.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_0(\omega)| = -20$  [dB].

2.  $\omega_{gc} = 0.1$  [rad / s] 程度, PM = 80° 程度,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_1(\omega)| = \infty$ .

3.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_0(\omega)| = -20$  [dB] と定数値に留まっているのに対し,  $L_1(s)$  では,  $\omega \rightarrow 0$  のとき,  $-20$  [dB / dec] の傾きでゲインが増加し  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_1(\omega)| = \infty$  となっている. これにより, ステップ応答に対する定常偏差を除去することができている.

4.  $\omega_{gc} = 0.7$  [rad / s] 程度, PM = 20° 程度,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_2(\omega)| = \infty$ .

5.  $L_1(s)$  での  $\omega_{gc} = 0.1$  [rad / s] に対し,  $L_2(s)$  では  $\omega_{gc} = 0.7$  [rad / s] とゲイン交差周波数を引き上げることができている. これにより制御系の速応性が向上し, ステップ応答の立ち上がりを早くできている.

6.  $L_1(s)$  での PM = 80° に対し,  $L_2(s)$  では PM = 20° と位相余裕が減少している. このため制御系の安定余裕が劣化し, ステップ応答が振動的になっている.

7.  $\omega_{gc} = 0.8$  [rad / s] 程度, PM = 45° 程度,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_3(\omega)| = \infty$ .

8.  $L_2(s)$  で PM = 20° まで減少していた位相余裕が, 位相進みコントローラにより, PM = 45° まで引き上げられている. これにより制御系の余裕が向上し, 振動的な振る舞いが抑制された.

演習問題サンプル解答 14.2. 1.  $L_2(s)$  のボード線図を図 14.38 に示す.

2.  $L_1(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc} = 1$  [rad/s],  $L_2(s)$  のゲイン交差周波数  $\omega_{gc} = 10$  [rad/s].

3.  $L_1(s)$  と  $L_2(s)$  を比較すると,  $L_2(s)$  の方がゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  が高く, したがって速応性に優れている. よって  $L_1(s)$  に対応するのは図 14.34(a) のステップ応答,  $L_2(s)$  に対応するのは図 14.34(b) のステップ応答.

演習問題サンプル解答 14.3. 1.  $L_1(s)$  のボード線図を図 14.39(a) に示す.

2.  $\omega_{gc} = 10$  [rad/s], PM = 90°,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_1(j\omega) = 20$  [dB].

3.  $L_2(s)$  のボード線図を図 14.39(b) に示す.

4.  $\omega_{gc} = 3$  [rad/s] 程度, PM = 20° 程度,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_2(j\omega) = \infty$ .

5.  $L_3(s)$  のボード線図を図 14.39(c) に示す.

6.  $\omega_{gc} = 10$  [rad/s], PM = 45° 程度,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_2(j\omega) = \infty$ .

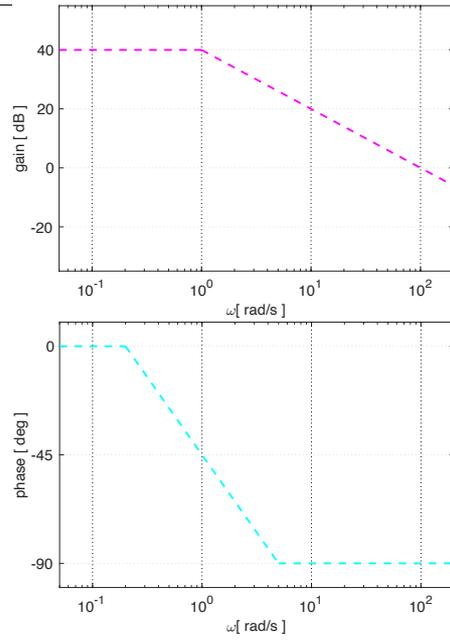
(a)  $L_2(s)$ 

Fig. 14.38: ボード線図

7.  $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_1(j\omega) = 20$  [dB] であるため,  $L_1(s)$  に対応するステップ応答には定常偏差が生じる. したがって図 14.37(a).  $L_2(s)$  は,  $PM = 20^\circ$  程度と位相余裕が小さいため, 振動的な応答を示す. したがって図 14.37(b)  $L_3(s)$  では, 位相進みコントローラにより,  $PM = 45^\circ$  と位相余裕も改善されている. したがって図 14.37(c).

## 演習問題サンプル解答 14.4.

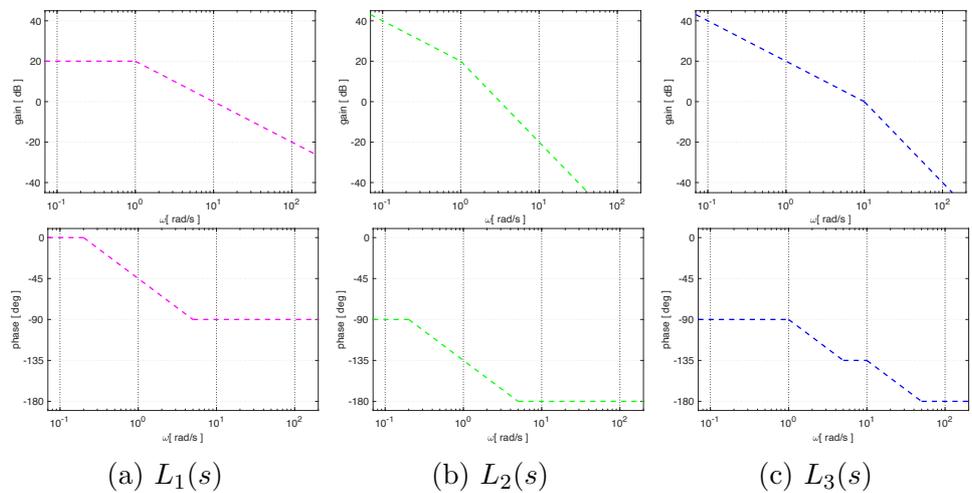
(a)  $L_1(s)$ (b)  $L_2(s)$ (c)  $L_3(s)$ 

Fig. 14.39: ボード線図

## 第15章 二自由度制御系

はじめに,

### 第15章のポイント

•

それでは、フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性を与える条件を具体的に考えていこう。フィードバック制御系のブロック線図 Fig. 11.5(c) (Fig. 11.3) から

$$\begin{aligned} z &= P(s)(u + w) = P(s)u + P(s)w \\ &= P(s)(C_{ff}(s)r - C(s)z) + P(s)w \\ &= -P(s)C(s)z + P(s)C_{ff}(s)r + P(s)w \end{aligned}$$

である。これを变形し

$$\begin{aligned} (1 + P(s)C(s))z &= P(s)C_{ff}(s)r + P(s)w \\ z &= \frac{P(s)C_{ff}(s)}{1 + P(s)C(s)}r + \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}w \end{aligned}$$

がえられる。同様に

$$\begin{aligned} u &= C_{ff}(s)r - C(s)z = C_{ff}(s)r - C(s)P(s)(u + w) \\ &= C_{ff}(s)r - C(s)P(s)u - C(s)P(s)w \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} (1 + C(s)P(s))u &= C_{ff}(s)r - C(s)P(s)w \\ u &= \frac{C_{ff}(s)}{1 + C(s)P(s)}r - \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}w \end{aligned}$$

がえられる。

ここで  $r$  から  $z$  への伝達関数を  $G_{zr}(s) = P(s)C(s)/(1 + P(s)C(s))$  とあらわし、ほかの三つの伝達関数もそれぞれ  $G_{zw}(s)$ ,  $G_{ur}(s)$ ,  $G_{uw}(s)$  とあらわすことにすれば、入力  $w, r$  から出力  $z, u$  への特性は

$$\begin{aligned} z &= G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r \\ u &= G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r \end{aligned} \quad (15.1a)$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} & G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C_{ff}(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} & G_{ur}(s) &= \frac{C_{ff}(s)}{1 + C(s)P(s)} \end{aligned} \quad (15.1b)$$

とまとめることができる。

制御対象の伝達関数  $P(s)$ , コントローラの伝達関数  $C(s)$  共に, 分母と分子の多項式  $N_p(s), D_p(s), N_c(s), D_c(s)$  の比により

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad C_{ff}(s) = \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)}$$

とあらわすことを考えていた ((11.1), (11.4) 参照). また 11.2 節で確認したように, フィードバック制御系の安定性は (15.1b) の四つの伝達関数

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} & G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C_{ff}(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} & G_{ur}(s) &= \frac{C_{ff}(s)}{1 + C(s)P(s)} \end{aligned}$$

がすべて安定なことと等価であった. この四つの伝達関数を多項式  $N_p(s), D_p(s), N_c(s), D_c(s)$  を使ってあらわしてみよう.

伝達関数  $G_{zw}(s)$  は

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

とあらわせる. ほかの三つの伝達関数も同様に求めることができる.

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C_{ff}(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{N_p(s) \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)} D_c(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} = \frac{N_p(s)N_{ff}(s)D_c(s)}{(D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s))D_{ff}(s)} \end{aligned}$$

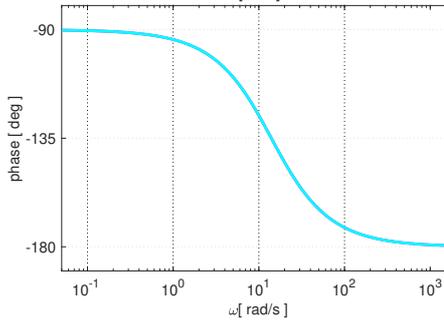
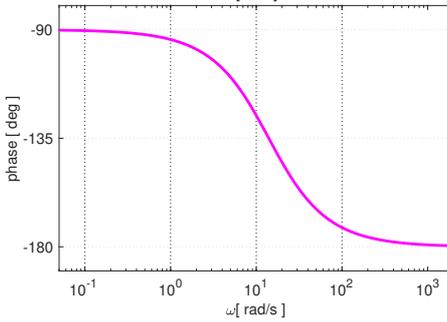
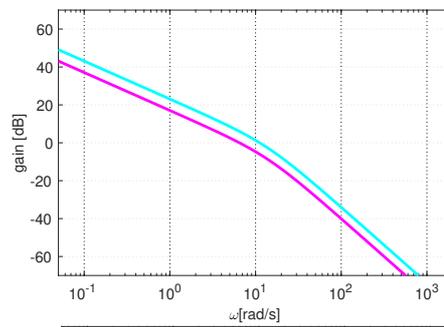
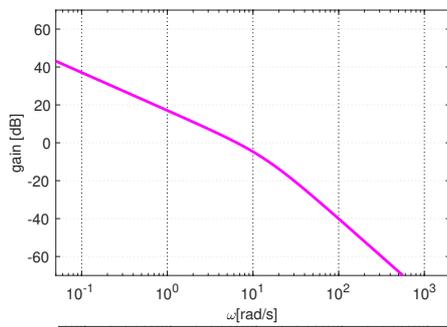
$$\begin{aligned} G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = -\frac{\frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{N_c(s)}{D_c(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

あらためてまとめると、四つの伝達関数は

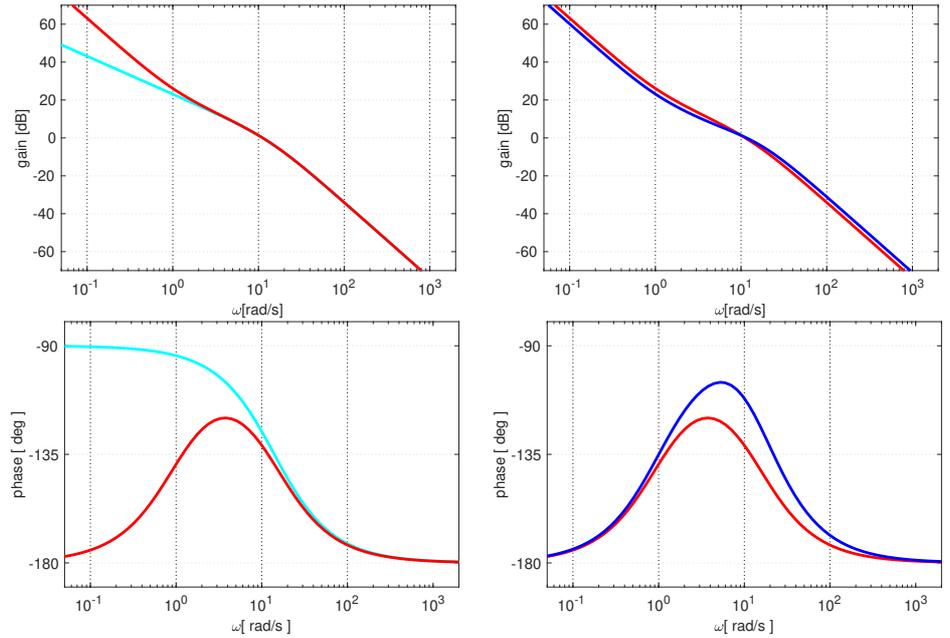
$$\begin{aligned}
 G_{zw}(s) &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{zr}(s) &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{uw}(s) &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \\
 G_{ur}(s) &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}
 \end{aligned} \tag{15.2}$$

のように表現できる。四つの伝達関数の分母多項式は、共通に  $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  になっている。

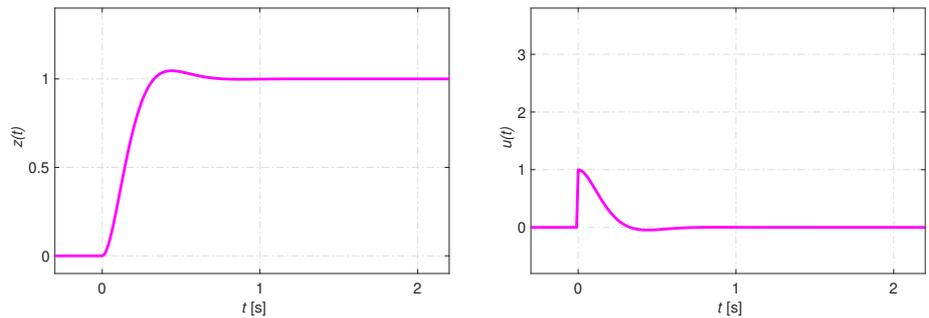


(a) ボード線図:  $L_0(s) = P(s)$

(b) ボード線図:  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$

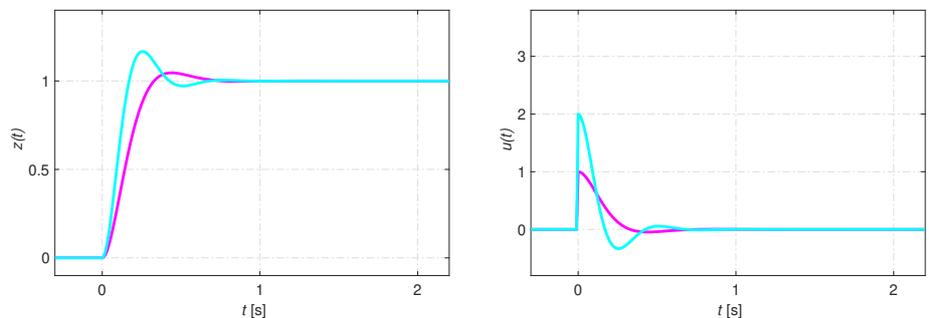


(a) ボード線図:  $L_2(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)$       (b) ボード線図:  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$



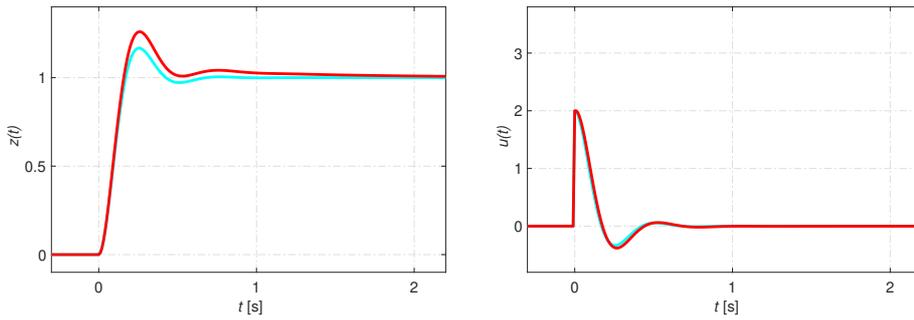
(a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_0(s) = P(s)$  のとき      (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_0(s) = P(s)$  のとき

Fig. 15.3: ステップ応答:  $L_0(s) = P(s)$  のとき



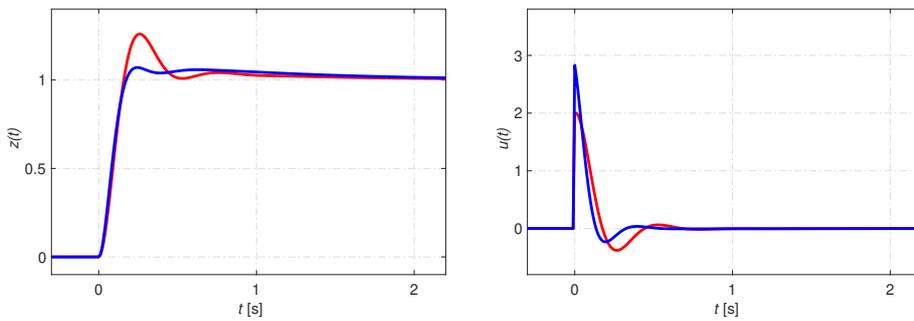
(a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のとき      (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のとき

Fig. 15.4: ステップ応答:  $L_1(s) = P(s)C_1(s)$  のとき



(a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_2(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)$  のとき (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_2(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)$  のとき

Fig. 15.5: ステップ応答:  $L_1(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)$  のとき



(a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき

Fig. 15.6: ステップ応答:  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき

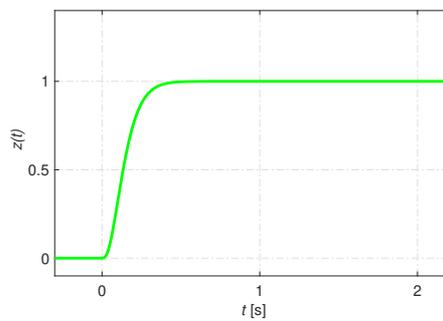
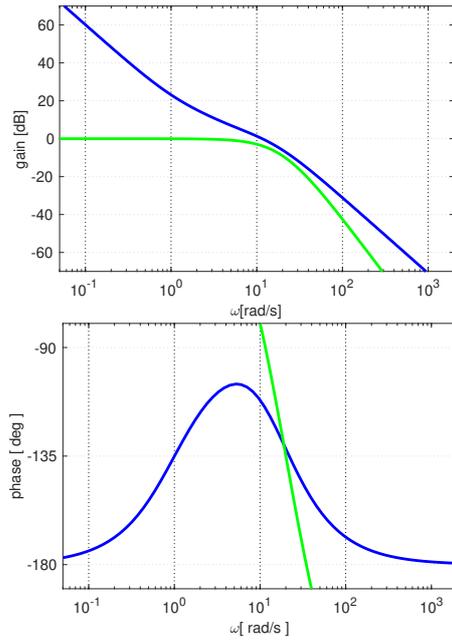
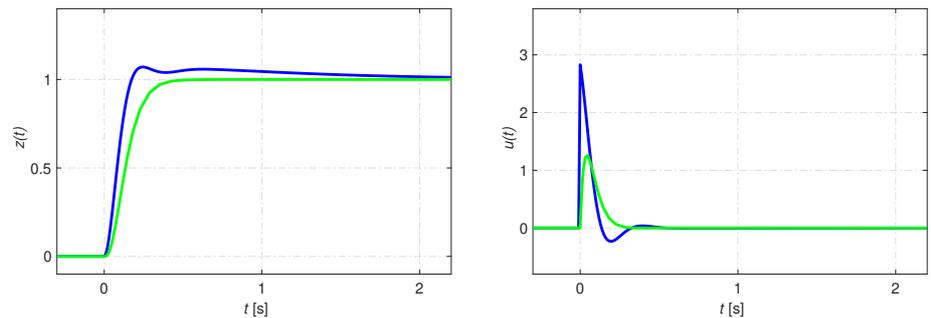
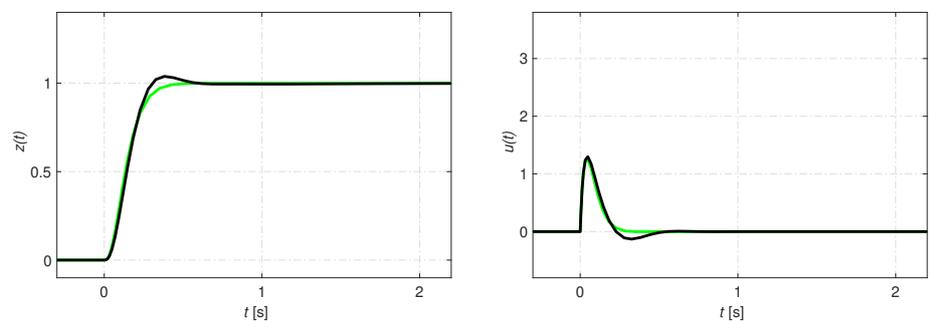


Fig. 15.7: 規範モデル  $W(s)$  のステップ応答

Fig. 15.8: ボード線図:  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$ (a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のときFig. 15.9: ステップ応答:  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき(a) ステップ応答  $z(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき (b) ステップ応答  $u(t)$ :  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のときFig. 15.10: ステップ応答:  $L_3(s) = P(s)C_1(s)C_2(s)C_3(s)$  のとき