

システム制御工学 II フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性

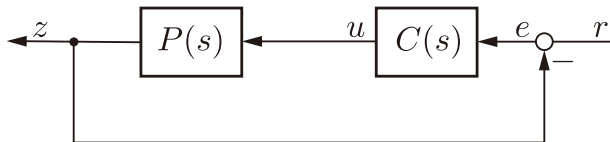
12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系

01/28 期末試験

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{b_{n_n}^p s^{n_n^p} + b_{n_n-1}^p s^{n_n^p-1} + \dots + b_1^p s + b_0^p}{s^{n_d^p} + a_{n_d-1}^p s^{n_d^p-1} + \dots + a_1^p s + a_0^p} \quad n_n^p < n_d^p$$

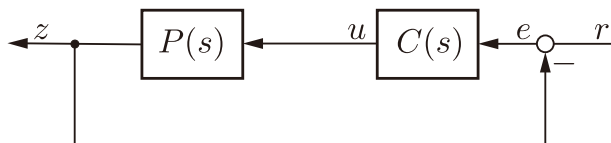
$$N_p(s) = b_{n_n}^p s^{n_n^p} + b_{n_n-1}^p s^{n_n^p-1} + \dots + b_1^p s + b_0^p$$

$$D_p(s) = s^{n_d^p} + a_{n_d-1}^p s^{n_d^p-1} + \dots + a_1^p s + a_0^p$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad x_p(t_0) = x_{p0}$$

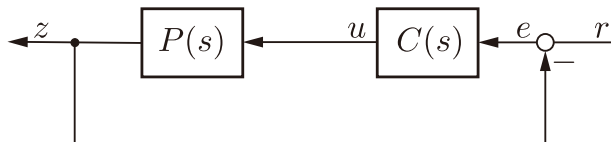
$$z(t) = C_p x_p(t) \quad t \geq t_0$$

$$A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} \quad B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1} \quad C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}$$

$$P(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p = \frac{1}{\det(sI - A_p)} C_p \text{adj}(sI - A_p) B_p$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$C(s) = \frac{b_{n_c}^c s^{n_c} + b_{n_c-1}^c s^{n_c-1} + \dots + b_1^c s + b_0^c}{s^{n_d} + a_{n_d-1}^c s^{n_d-1} + \dots + a_1^c s + a_0^c} \quad n_n^c \leq n_d^c$$

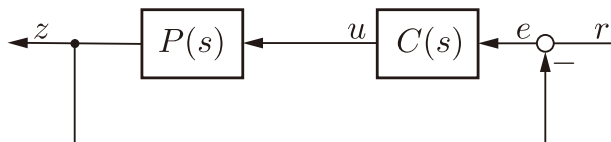
$$N_c(s) = b_{n_c}^c s^{n_c} + b_{n_c-1}^c s^{n_c-1} + \dots + b_1^c s + b_0^c$$

$$D_c(s) = s^{n_d} + a_{n_d-1}^c s^{n_d-1} + \dots + a_1^c s + a_0^c$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$n_n^c = n_d^c$$

$$u = 3e = \frac{3}{1}e$$

$$u = 3e + \frac{1}{s}e = \frac{3s + 1}{s}e$$

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 0e(t)$$

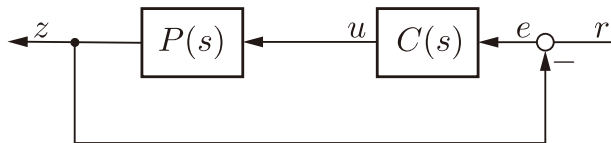
$$u(t) = 0x_c(t) + 3e(t)$$

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 1e(t)$$

$$u(t) = 1x_c(t) + 3e(t)$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \quad x_c(t_0) = x_{p0}$$

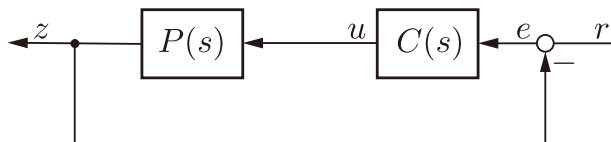
$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t) \quad t \geq t_0$$

$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1} \quad C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c} \quad D_c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} C(s) &= D_c + C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \\ &= D_c + \frac{1}{\det(sI - A_c)} C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c \\ &= \frac{D_c \det(sI - A_c) + C_c \text{adj}(sI - A_c) B_c}{\det(sI - A_c)} \end{aligned}$$

制御対象とコントローラの表現

フィードバック制御系の安定性



$$n_n^c = n_d^c$$

$$u = 3e = \frac{3}{1}e$$

$$u = 3e + \frac{1}{s}e = \frac{3s+1}{s}e$$

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 0e(t)$$

$$u(t) = 0x_c(t) + 3e(t)$$

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 1e(t)$$

$$u(t) = 1x_c(t) + 3e(t)$$

システム制御工学 II フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性

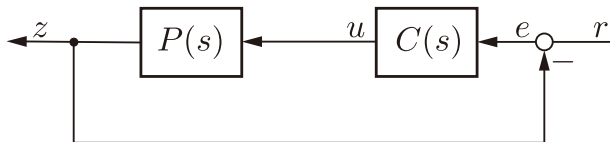
12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系

01/28 期末試験

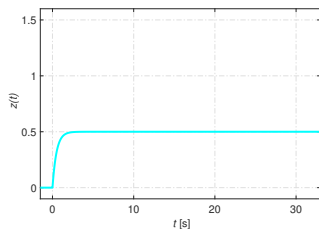
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

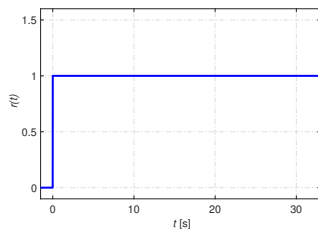


$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



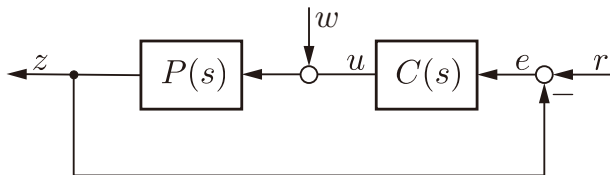
a 出力 $z(t)$



b ステップ入力 $r(t)$

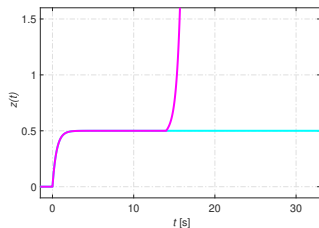
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

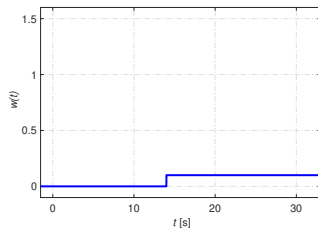


$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



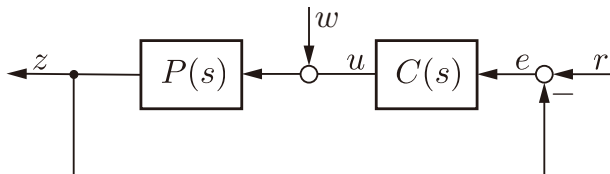
a 出力 $z(t)$



b 外乱 $w(t)$

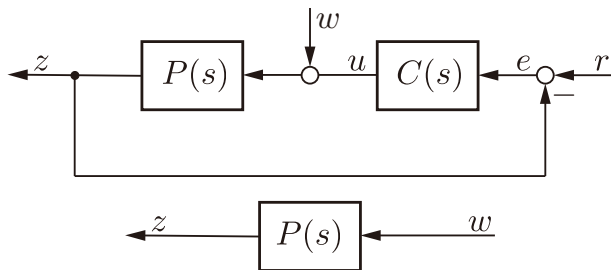
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



有界入力有界出力安定性

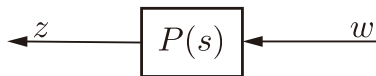
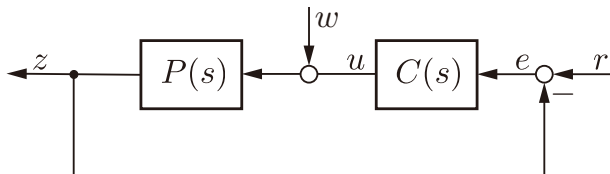
フィードバック制御系の安定性



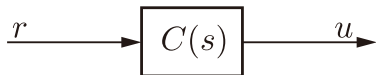
a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



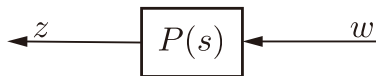
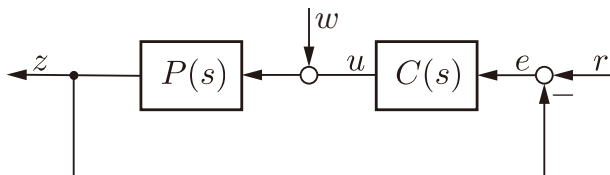
a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P



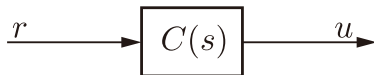
b フィードバック制御系の構成要素: コントローラ C

有界入力有界出力安定性

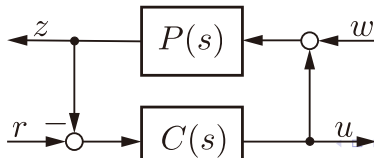
フィードバック制御系の安定性



a フィードバック制御系の構成要素: 制御対象 P

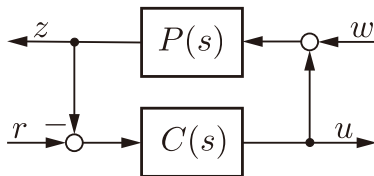


b フィードバック制御系の構成要素: コントローラ C



有界入力有界出力安定性

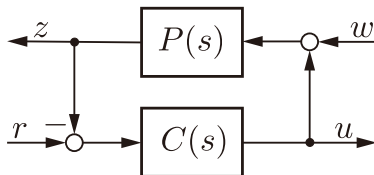
フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



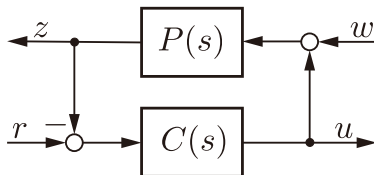
$$\begin{aligned}z &= P(s)(u + w) = P(s)u + P(s)w \\ &= P(s)C(s)(r - z) + P(s)w\end{aligned}$$

$$(1 + P(s)C(s))z = P(s)C(s)r + P(s)w$$

$$z = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}r + \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}w$$

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

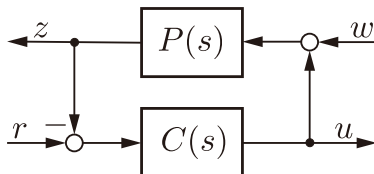


$$\begin{aligned}u &= C(s)(r - z) = C(s)r - C(s)z \\ &= C(s)r - C(s)P(s)(u + w)\end{aligned}$$

$$(1 + C(s)P(s))u = C(s)r - C(s)P(s)w$$

$$u = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}r - \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}w$$

有界入力有界出力安定性



$$z = G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r$$

$$u = G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r$$

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

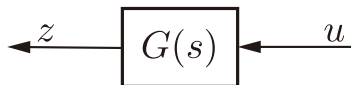
(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

\Leftrightarrow

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

ちょっと復習

有界入力有界出力安定性



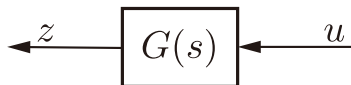
安定性の定義 1 (有界入力有界出力安定性)

任意の有界入力 u に対する出力 z が有界

定理 (有界入力有界出力安定)

任意の有界入力 u に対する有理伝達関数 G の出力 z が有界となる必要十分条件は、 G のすべての極の実数部が負であることである。

有界入力有界出力安定性



安定性の定義 1 (有界入力有界出力安定性)

任意の有界入力 u に対する出力 z が有界

定理 (有界入力有界出力安定)

任意の有界入力 u に対する有理伝達関数 G の出力 z が有界となる必要十分条件は、 G のすべての極の実数部が負であることである。

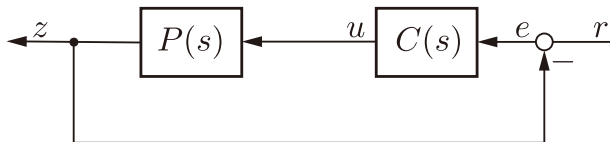
$$G(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)} \quad p_1 = -1, p_2 = -2 \quad \text{安定}$$

$$G(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s+3)} \quad p_1 = 1, p_2 = -3 \quad p_1 = 1 > 0 \quad \text{不安定}$$

ここまで復習

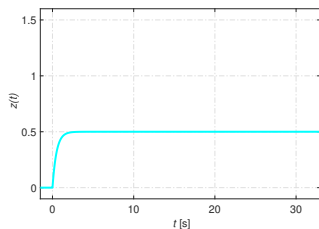
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

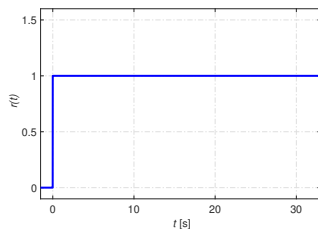


$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



a 出力 $z(t)$



b ステップ入力 $r(t)$

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

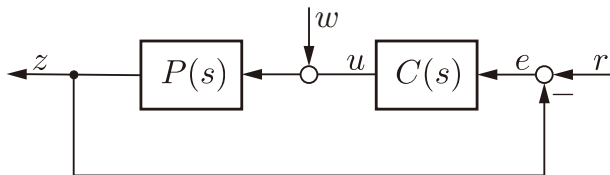
$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}}{1 + \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}} = \frac{s-2}{(s-2)(s+1) + (s-2)} \\ &= \frac{s-2}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s-2}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

$G_{zr}(s)$ の極: -2 安定

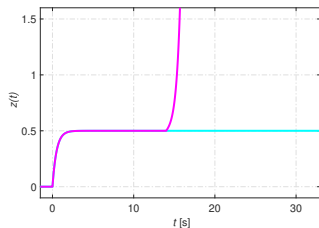
有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

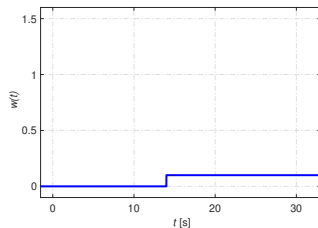


$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$



a 出力 $z(t)$



b 外乱 $w(t)$

有界入力有界出力安定性

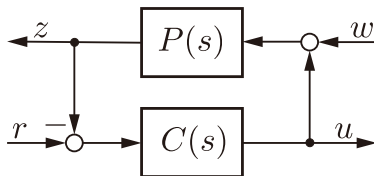
フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-2}}{1 + \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-2)(s+1) + (s-2)} \\ &= \frac{s+1}{(s-2)(s+1+1)} = \frac{s+1}{(s-2)(s+2)} \end{aligned}$$

$G_{zw}(s)$ の極: $-2, 2$ $2 > 0$ 不安定

有界入力有界出力安定性



$$z = G_{zw}(s)w + G_{zr}(s)r$$

$$u = G_{uw}(s)w + G_{ur}(s)r$$

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

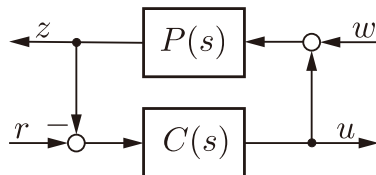
(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

⇔

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

有界入力有界出力安定性

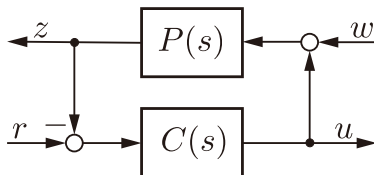
フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、四つの伝達関数 $G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$G_{zw}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

$$G_{uw}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{\frac{N_p(s)}{D_p(s)}}{1 + \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \frac{N_c(s)}{D_c(s)}} \\ &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

- 分母多項式は、共通に $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

⇔

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

⇔

$(D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0)$ すべての根の実数部が負)

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

- 特性多項式 $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$
- $\phi(s) = 0$ の根: 閉ループ極

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$$N_p(s) = 1 \quad (n_n^p = 0) \quad D_p(s) = s-2 \quad (n_d^p = 1)$$

$$N_c(s) = s-2 \quad (n_n^c = 1) \quad D_c(s) = s+1 \quad (n_d^c = 1)$$

$$\begin{aligned} \phi(s) &= D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = (s+1)(s-2) + (s-2) \times 1 \\ &= (s+1+1)(s-2) = (s+2)(s-2) \end{aligned}$$

閉ループ極: $-2, 2$ $2 > 0$ 不安定

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$

$$N_p(s) = 1 \quad (n_n^p = 0) \quad D_p(s) = s-2 \quad (n_d^p = 1)$$

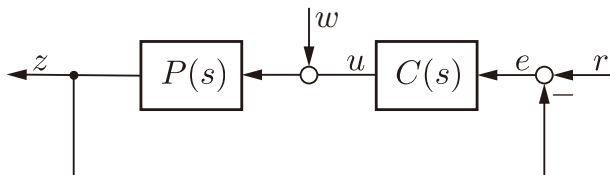
$$N_c(s) = 5(s+1) \quad (n_n^c = 1) \quad D_c(s) = s \quad (n_d^c = 1)$$

$$\begin{aligned} \phi(s) &= D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = s(s-2) + 5(s+1) \times 1 \\ &= s^2 - 2s + 5s + 5 = s^2 + 3s + 5 \end{aligned}$$

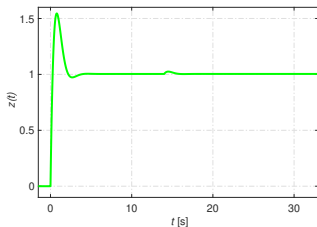
閉ループ極: $p_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2 \quad \text{Re}[p_{1,2}] = -3/2 < 0$ 安定

特性多項式

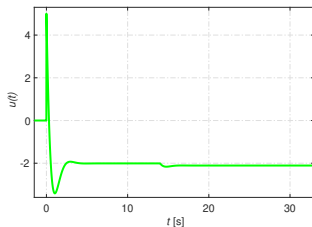
フィードバック制御系の安定性



$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$



a 出力 $z(t)$



b 入力 $u(t)$

特性多項式

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

⇔

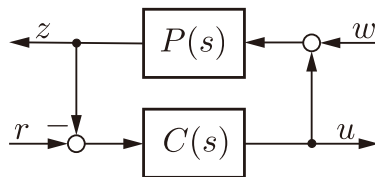
(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

⇔

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

有界入力有界出力安定性

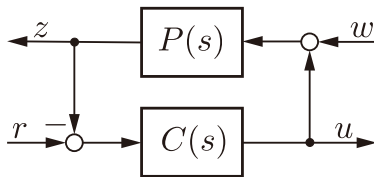
フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

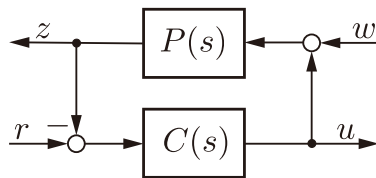


安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、四つの伝達関数 $G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、四つの伝達関数 $G_{zw}(s), G_{zr}(s), G_{uw}(s), G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

定理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は、 $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負であることである

システム制御工学 II フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性

12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系

01/28 期末試験

ちょっと復習

漸近安定性

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0 \\ z(t) &= Cx(t) & t &\geq t_0 \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n} & B &\in \mathbb{R}^{n \times 1} & C &\in \mathbb{R}^{1 \times n}\end{aligned}$$

零入力応答

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

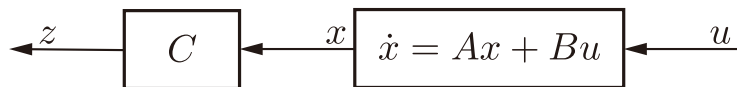
安定性の定義 3 (漸近安定性)

任意の x_0 に対して $x(t) = e^{At}x_0 \rightarrow 0$

定理 (漸近安定)

任意の x_0 に対して $x(t) = e^{At}x_0 \rightarrow 0$ であるための必要十分条件は, 行列 A のすべての固有値の実数部が負であることである.

状態空間表現について, 補足



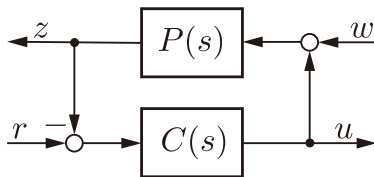
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

- (漸近安定) \Leftrightarrow (行列 A のすべての固有値の実数部が負)
 \Rightarrow (伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ の
すべての極の実数部が負)
 \Leftrightarrow (有界入力有界出力安定)

ここまで復習

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性



$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p(w(t) + u(t)) \quad x_p(t_0) = x_{p0}$$

$$z(t) = C_p x_p(t) \quad t \geq t_0$$

$$A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} \quad B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1} \quad C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c(r(t) - z(t)) \quad x_c(t_0) = x_{p0}$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c(r(t) - z(t)) \quad t \geq t_0$$

$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1} \quad C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c} \quad D_c \in \mathbb{R}$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$e(t) = r(t) - z(t) = r(t) - C_p x_p(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) = A_c x_c(t) + B_c (r(t) - C_p x_p(t)) \\ &= -B_c C_p x_p(t) + A_c x_c(t) + B_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) = C_c x_c(t) + D_c (r(t) - C_p x_p(t)) \\ &= -D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

漸近安定性

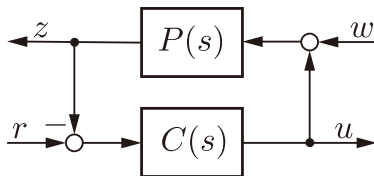
フィードバック制御系の安定性

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p(w(t) + u(t)) \\ &= A_p x_p(t) + B_p(w(t) - D_c C_p x_p(t) + C_c x_c(t) + D_c r(t)) \\ &= (A_p - B_p D_c C_p) x_p(t) + B_p C_c x_c(t) + B_p w(t) + B_p D_c r(t) \\ &= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_p D_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_c C_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq t_0$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)

任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

\Leftrightarrow

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{1}{s-2} \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{5(s+1)}{s}$$

$$\dot{x}_p(t) = 2x_p(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_c(t) = 0x_c(t) + 2e(t)$$

$$z(t) = x_p(t)$$

$$u(t) = 2.5x_c(t) + 5e(t)$$

$$\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2.5 \\ 2 & s \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda(\lambda + 3) + 5 = \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

固有値: $\lambda_{1,2} = (-3 \pm j\sqrt{11})/2$ $\text{Re}[\lambda_{1,2}] = -3/2 < 0$ 漸近安定

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

\Leftrightarrow

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)

任意の初期条件

$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

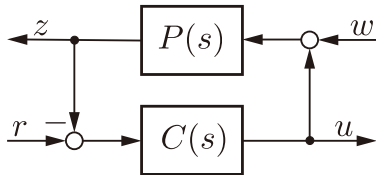
$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定理 (フィードバック制御系の漸近安定性)

フィードバック制御系が漸近安定となる必要十分条件は、

行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負となることである

フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

\Leftrightarrow

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

\Rightarrow

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

\Leftrightarrow

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

フィードバック制御系の安定性

$$\det \left(sI - \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \right) = D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s)$$

を示せばよい

資料の 11.4.1 節 を参照

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$
$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

⇔

(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

⇔

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

零入力応答:

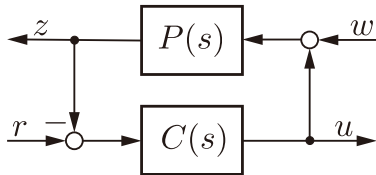
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

(フィードバック制御系は漸近安定)

\Leftrightarrow

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

\Leftrightarrow

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

\Rightarrow

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

\Leftrightarrow

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

システム制御工学 II フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性

12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系

01/28 期末試験