システム制御工学 II　　フィードバック制御系の設計

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

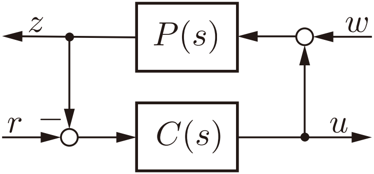
二自由度制御系

01/28 期末試験

ちょっと復習

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性



安定性の定義 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
任意の有界入力 w, r に対する出力 z, u が有界

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, 四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ がすべて有界入力有界出力安定であることである

定 理 (フィードバック制御系の有界入力有界出力安定性)
フィードバック制御系が有界入力有界出力安定性となる必要十分条件は, $\phi(s) = D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負であることである

有界入力有界出力安定性

フィードバック制御系の安定性

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$G_{zw}(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{zr}(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

$$G_{uw}(s) = \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \qquad G_{ur}(s) = \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(}$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

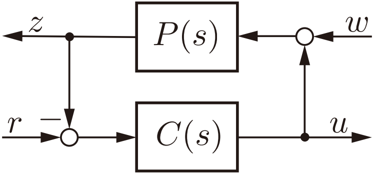
(四つの伝達関数 $G_{zw}(s)$, $G_{zr}(s)$, $G_{uw}(s)$, $G_{ur}(s)$ が
すべて有界入力有界出力安定)

$\Leftrightarrow$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & B_pD_c \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ -D_cC_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p(t_0) \\ x_c(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \qquad t \geq t_0$$

漸近安定性

フィードバック制御系の安定性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

安定性の定義 (フィードバック制御系の漸近安定性)
任意の初期条件

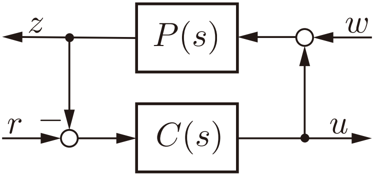
$$\begin{bmatrix} x_p(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$$

に対する零入力応答が

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定 理 (フィードバック制御系の漸近安定性)
フィードバック制御系が漸近安定となる必要十分条件は，
行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_pD_cC_p & B_pC_c \\ -B_cC_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部
が負となることである

フィードバック制御系の安定性



(フィードバック制御系は漸近安定)

$$\Leftrightarrow$$

(行列 $\begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$ のすべての固有値の実数部が負)

$$\Rightarrow$$

($D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ のすべての根の実数部が負)

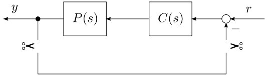
$$\Leftrightarrow$$

(フィードバック制御系は有界入力有界出力安定)

ここまで復習

	フィードバック vs フィードフォワード
	フィードバック制御系の安定性
12/03	中間試験
	ナイキストの安定判別法
	ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
	二自由度制御系
01/28	期末試験

フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

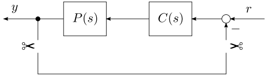


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$

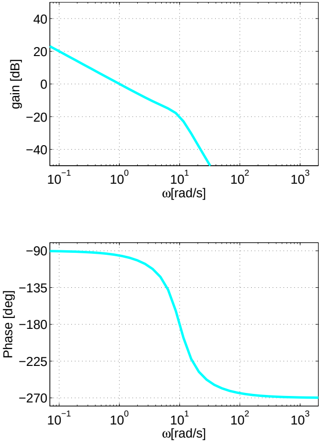
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



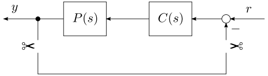
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$



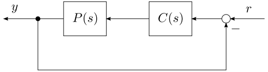
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

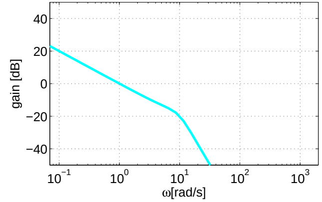


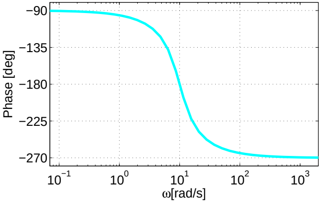
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

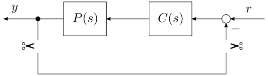
$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$







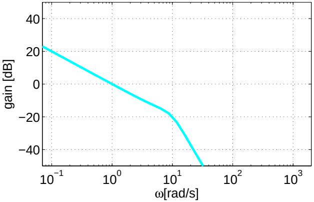
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

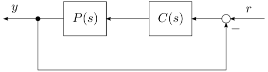


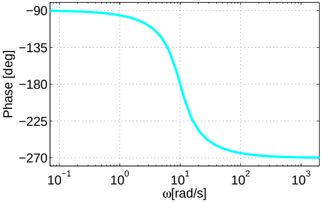
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

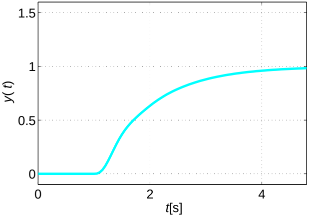
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$

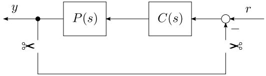








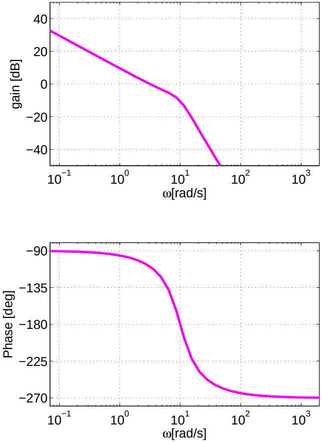
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



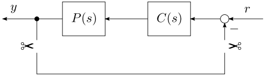
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3$$



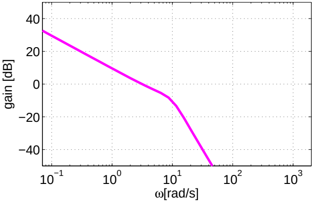
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

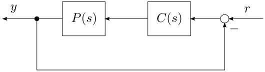


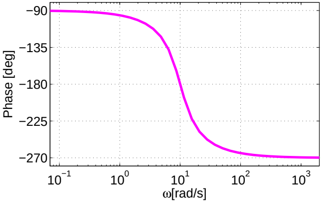
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

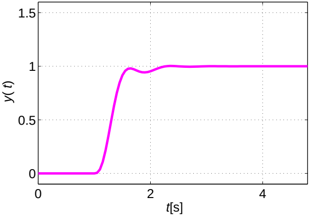
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3$$

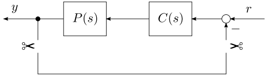








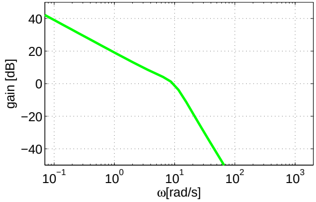
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

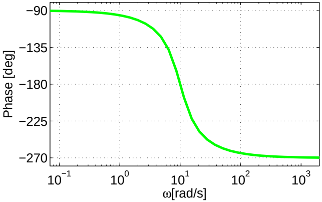


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

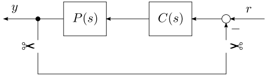
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3, 9$$





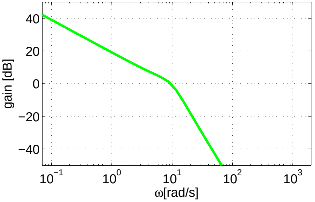
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

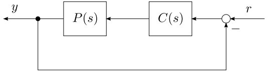


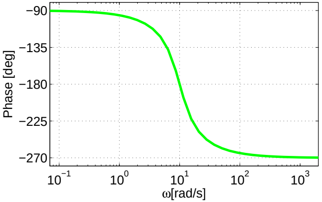
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

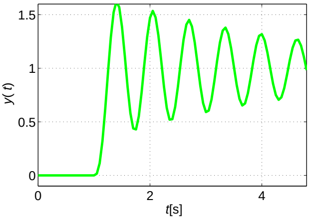
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3, 9$$









フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法: 準備
- ナイキストの安定判別法: 使い方
- ナイキストの安定判別法: 導出
- 簡略化されたナイキストの安定判別法
- 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

ナイキストの安定判別法: 準 備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \\ &= \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)} \\ G_{uw}(s) &= -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \\ &= \frac{-N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{zr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \\ &= \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)} \\ G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)} \\ &= \frac{N_c(s)D_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)} \end{aligned}$$

ナイキストの安定判別法: 準 備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ伝達関数 $$L(s) = P(s)C(s) = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

$$1+L(s) = 1+P(s)C(s) = 1+\frac{N_p(s)}{D_p(s)}\frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

ナイキストの安定判別法: 準 備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ伝達関数 $\quad L(s) = P(s)C(s) = \dfrac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$

$$1+L(s) = 1+P(s)C(s) = 1+\frac{N_p(s)}{D_p(s)}\frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極： $\quad D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s) = 0$ の根

開ループ極： $\quad D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

例題 13.1, 13.2

開ループ極: $D_c(s)D_p(s) = 0$

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \qquad C(s) = \frac{1}{s}$$

$D_p(s)D_c(s) = (s+0.1)(s+1) \times s$ **開ループ極**: -1, -0.1, 0

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \qquad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$ **開ループ極**: -1, 1

ナイキストの安定判別法: 準 備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極 : $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ **の根**

開ループ極 : $D_c(s)D_p(s) = 0$ **の根**

ナイキストの安定判別法: 準 備

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

閉ループ極 : $D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = 0$ の根

開ループ極 : $D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

知りたい : 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数 Z

知っている : 開ループ極のうち, 不安定なものの個数 P

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法: 準備
- ナイキストの安定判別法: 使い方
- ナイキストの安定判別法: 導出
- 簡略化されたナイキストの安定判別法
- 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

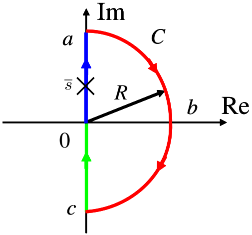
ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

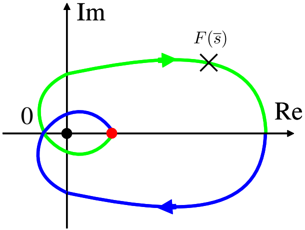
知りたい： 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数 Z

知っている： 開ループ極のうち, 不安定なものの個数 P

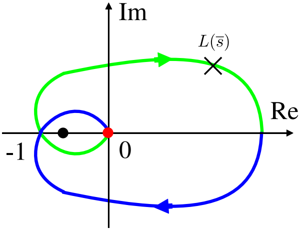
ナイキストの安定判別法: 使い方



a 変数 $\bar{s}$



b $F(\bar{s}) = 1 + L(\bar{s})$



ナイキスト軌跡: $L(\bar{s})$

ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい： 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数 Z

知っている： 開ループ極のうち, 不安定なものの個数 P

ナイキストの安定判別法: 使い方

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい： 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数 Z

知っている： 開ループ極のうち, 不安定なものの個数 P

ナイキストの安定判別法: $N = Z - P$

ナイキストの安定判別法: 使い方

ナイキストの安定判別法

手順 1 $D_p(s)D_c(s) = 0$ の根 (開ループ極) のうち, 不安定なものの個数 P を数える.

手順 2 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $L(j\omega)$, ω は 0 から ∞ の範囲, を描く.

手順 3 手順 2 での軌跡と実軸対象な軌跡を描き $L(j\omega)$, ω は $-\infty$ から 0 の範囲, をえる. これでナイキスト軌跡が描かれた.

手順 4 ナイキスト軌跡が点 $-1 + j0$ の周りを時計回りに回転する回数 N を数える. ただし, 反時計回りの回転は負の数として数える.

手順 5 $N = Z - P$ であり, フィードバック制御系は Z 個の不安定極をもつ. $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定である.

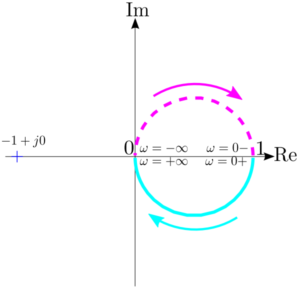
例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$　　不安定な開ループ極の数: $P = 0$

例題 13.3

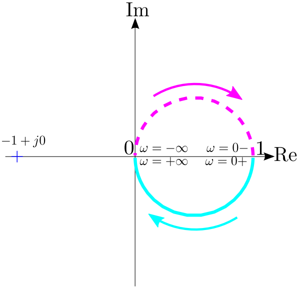
$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$ 　　**不安定な開ループ極の数**: $P = 0$

例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$ 　　不安定な開ループ極の数: $P = 0$
- ナイキスト軌跡が点 $-1+j0$ を回る回数: $N = 0$
- $N = Z - P$ 　　$Z = 0$: フィードバック制御系は安定

例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

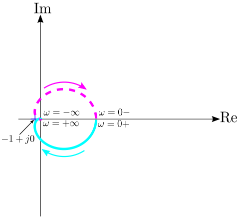
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ **不安定な開ループ極の数**: $P = 0$

例題 13.4

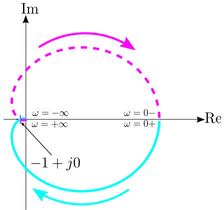
$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

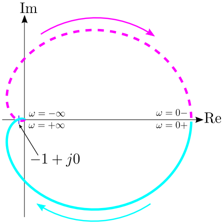
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$　　**不安定な開ループ極の数**: $P = 0$



a $k = 1$ **の場合**

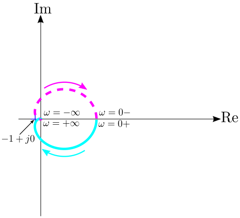


b $k = 2.4$ **の場合**

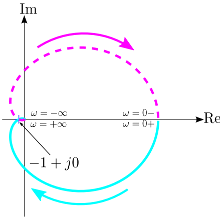


c $k = 3$ **の場合**

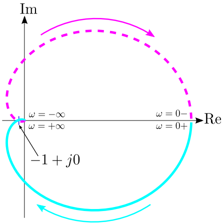
例題 13.4



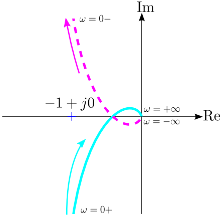
a $k=1$ の場合



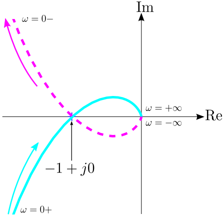
b $k=2.4$ の場合



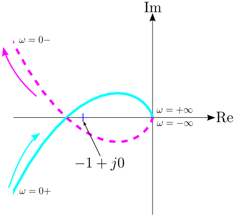
c $k=3$ の場合



a $k=1$ の場合

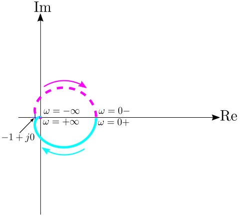


b $k=2.4$ の場合

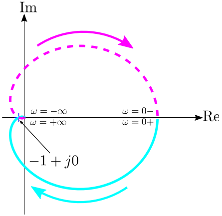


c $k=3$ の場合

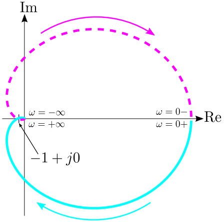
例題 13.4



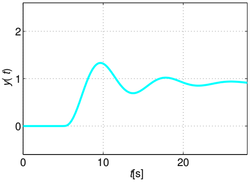
a $k = 1$ の場合



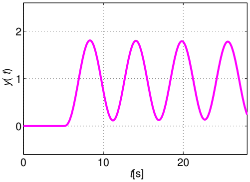
b $k = 2.4$ の場合



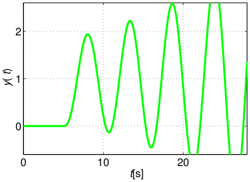
c $k = 3$ の場合



a $k = 1$ の場合



b $k = 2.4$ の場合



c $k = 3$ の場合

例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \qquad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

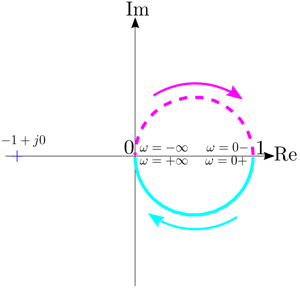
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$ **不安定な開ループ極の数**: $P = 1$

例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \qquad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

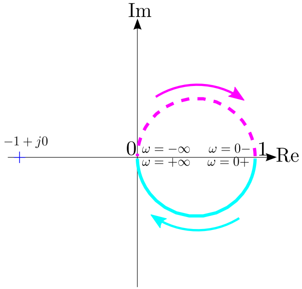


- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$ 不安定な開ループ極の数: $P = 1$

例題 13.5

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \qquad C(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s-1) \times (s+1)$ 不安定な開ループ極の数: $P = 1$
- ナイキスト軌跡が点 $-1 + j0$ を回る回数: $N = 0$
- $N = Z - P$ $Z = 1$: フィードバック制御系は不安定

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法: 準備
- ナイキストの安定判別法: 使い方
- ナイキストの安定判別法: 導出
- 簡略化されたナイキストの安定判別法
- 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

ナイキストの安定判別法: 導 出

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)}$$

知りたい： 閉ループ極のうち, 不安定なものの個数 Z
知っている： 開ループ極のうち, 不安定なものの個数 P

ナイキストの安定判別法: $N = Z - P$

ナイキストの安定判別法: 導 出

$$1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}{D_p(s)D_c(s)}$$
$$= \frac{(s - z_1)\cdots(s - z_n)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$$

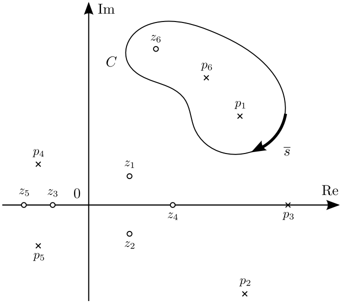
閉ループ極： $z_1, \ldots, z_n$　　開ループ極： $p_1, \ldots, p_n$

知りたい： $z_1, \ldots, z_n$ のうち, 不安定なものの個数 Z

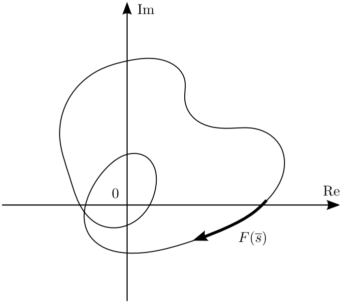
知っている： $p_1, \ldots, p_n$ のうち, 不安定なものの個数 P

ナイキストの安定判別法: 導 出

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{(s - z_1)\ldots(s - z_n)}{(s - p_1)\ldots(s - p_n)}$$



a



b

Figure: 閉曲線 C 上を時計回りに 1 周する変数 $\bar{s}$ とその時の像

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots \angle(s - p_n)$$

ナイキストの安定判別法: 導 出

閉曲線 C で囲まれる領域に 1 つの零点 z_1 だけが含まれている:

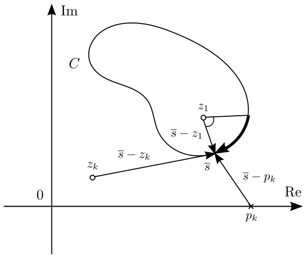


Figure: $\angle(\bar{s} - z_1)$ の総変化量は -360 [deg]

閉曲線 C が零点を 1 つのみ囲んでいる $\Rightarrow$

$F(\bar{s})$ は原点を時計回りに 1 回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots \angle(s - p_n)$$

ナイキストの安定判別法: 導 出

閉曲線 C で囲まれる領域の内部に Z 個の零点のみが含まれている:

閉曲線 C が零点を Z 個のみ囲んでいる $\Rightarrow$
$F(\bar{s})$ は原点を時計回りに Z 回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots \angle(s - p_n)$$

ナイキストの安定判別法: 導 出

閉曲線 C で囲まれる境域に 1 つの極 p_1 だけが含まれている:

閉曲線 C が極を 1 つのみ囲んでいる $\Rightarrow$
$F(\bar{s})$ は原点を時計回りに -1 回転

$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_n) - \angle(s - p_1) - \cdots \angle(s - p_n)$$

ナイキストの安定判別法: 導 出

閉曲線 C で囲まれる境域に Z 個の零点と P 個の極が含まれている:

閉曲線 C が零点を Z 個, 極を P 個囲んでいる $\Rightarrow$
$F(\bar{s})$ は原点を時計回りに $Z-P$ 回転

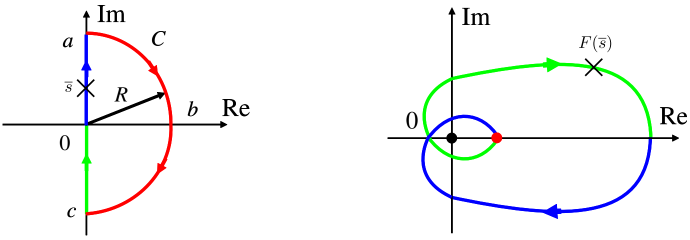
$$\angle F(\bar{s}) = \angle(s-z_1) + \cdots + \angle(s-z_n) - \angle(s-p_1) - \cdots \angle(s-p_n)$$

ナイキストの安定判別法: 導 出

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + P(s)C(s) = \frac{(s - z_1)\dots(s - z_n)}{(s - p_1)\dots(s - p_n)}$$

知りたい： $z_1, \dots, z_n$ のうち, 不安定なものの個数 Z

知っている： $p_1, \dots, p_n$ のうち, 不安定なものの個数 P



a 変数 $\bar{s}$

b $F(\bar{s}) = 1 + L(\bar{s})$

- 閉曲線 C が Z 個の零点と P 個の極を囲んでいる:

$$N = Z - P$$

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法: 準備
- ナイキストの安定判別法: 使い方
- ナイキストの安定判別法: 導出
- 簡略化されたナイキストの安定判別法
- 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

01/28 期末試験

簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極： $D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極： $D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

知っている： 開ループ極のうち，不安定なものの個数 $P = 0$

あるいは

簡略化されたナイキストの安定判別法

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

開ループ極：　$D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

知っている：　開ループ極のうち，不安定なものの個数 $P = 0$

あるいは

知っている：　開ループ極に，0 が一つだけ，残りは安定

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad + \qquad C(s) = \frac{s-2}{s(s+10)} \quad \text{(使える)}$$

$$C(s) = \frac{s-2}{s^2} \quad \text{(使えない)}$$

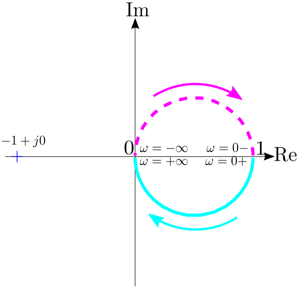
例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1}\times 1 = \frac{1}{s+1}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)\times 1$ 　不安定な開ループ極の数: $P = 0$

例題 13.3

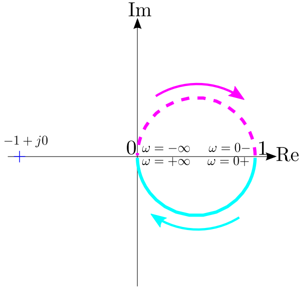
$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$ 不安定な開ループ極の数: $P = 0$

例題 13.3

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = 1 \qquad L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$



- $D_p(s)D_c(s) = (s+1) \times 1$　　不安定な開ループ極の数: $P = 0$
- ナイキスト軌跡が点 $-1 + j0$ を回る回数: $N = 0$
- $N = Z - P$　　$Z = 0$: フィードバック制御系は安定

例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

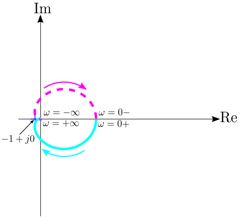
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ 　　**不安定な開ループ極の数**: $P = 0$

例題 13.4

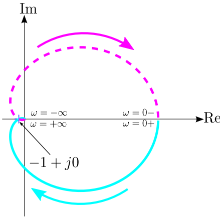
$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

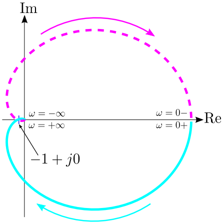
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$　　**不安定な開ループ極の数**: $P = 0$



a $k = 1$ **の場合**

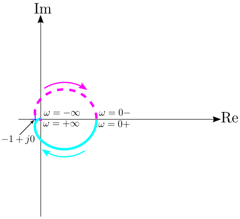


b $k = 2.4$ **の場合**

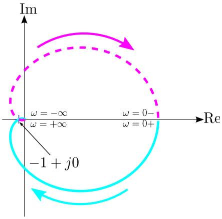


c $k = 3$ **の場合**

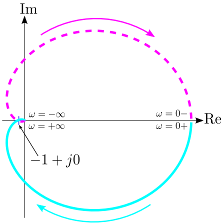
例題 13.4



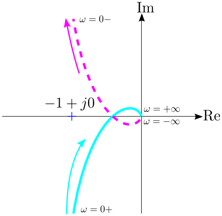
a $k=1$ の場合



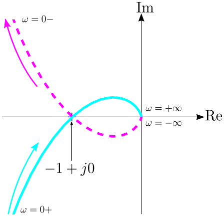
b $k=2.4$ の場合



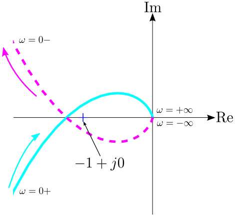
c $k=3$ の場合



a $k=1$ の場合

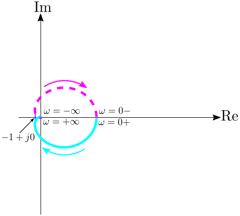


b $k=2.4$ の場合

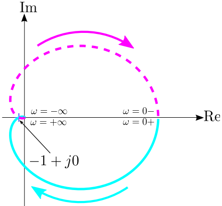


c $k=3$ の場合

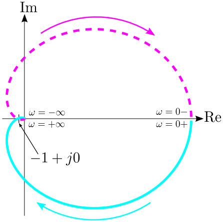
例題 13.4



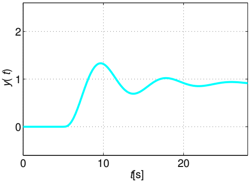
a $k = 1$ の場合



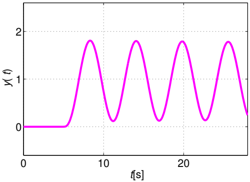
b $k = 2.4$ の場合



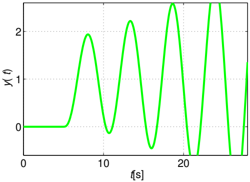
c $k = 3$ の場合



a $k = 1$ の場合



b $k = 2.4$ の場合



c $k = 3$ の場合

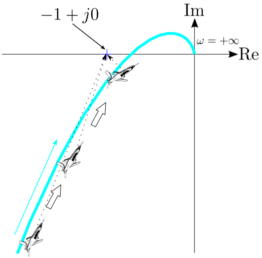
簡略化されたナイキストの安定判別法

開ループ極：　$D_c(s)D_p(s) = 0$ の根

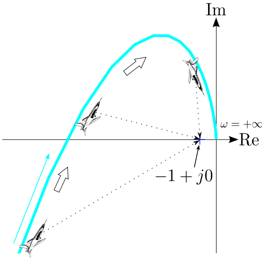
知っている：　開ループ極のうち，不安定なものの個数 $P = 0$

あるいは

知っている：　開ループ極に，0 が一つだけ，残りは安定

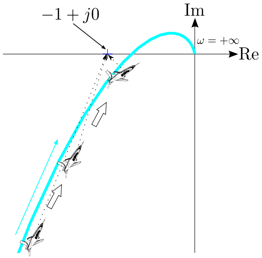


a 常に左手に見ているので 安定

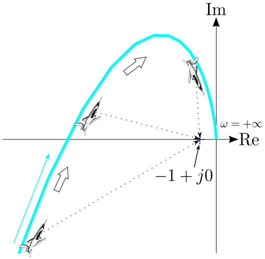


b 右手に見ることがあるので 不安定

簡略化されたナイキストの安定判別法



a 常に左手に見ているので 安定



b 右手に見ることがあるので 不安定

簡略化されたナイキストの安定判別法

手順 1 $D_p(s)D_c(s)=0$ の根 (開ループ極) に不安定なものがないこと, あるいは $s=0$ の極が 1 つだけで, 他はすべて安定極であることを確認する.

手順 2 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $L(j\omega)$, $\omega \geq 0$ を描く.

手順 3 ベクトル軌跡が, 点 $-1+j0$ を常に左手に見れば, フィードバック制御系は内部安定, そうでなければ不安定となる.

例題 13.6

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \qquad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$

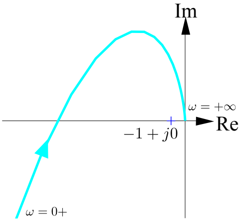
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s+0.1)(s+1)}$$

- $D_p(s)D_c(s) = s(s+0.1)(s+1)$ 　　開ループ極は 0, 残りは安定

例題 13.6

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \qquad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 1$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s+0.1)(s+1)}$$



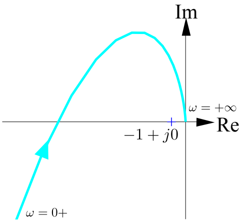
a $k = 1$ の場合

- $D_p(s)D_c(s) = s(s+0.1)(s+1)$ 　開ループ極は 0, 残りは安定
- ベクトル軌跡は点 $-1 + j0$ を右手に見て原点へと収束．安定ではない．

例題 13.7

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \qquad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 0.08$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s+0.1)(s+1)}$$



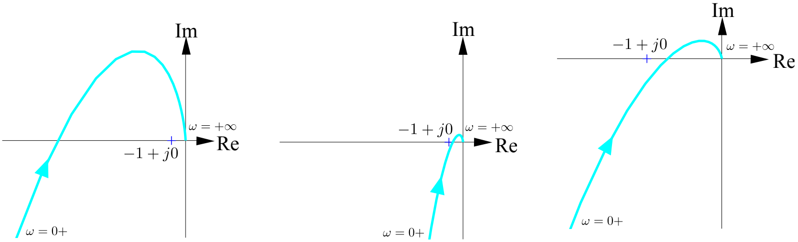
a $k = 1$ の場合

- $D_p(s)D_c(s) = s(s+0.1)(s+1)$ 　　開ループ極は 0, 残りは安定

例題 13.7

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \qquad C(s) = \frac{k}{s} \quad k = 0.08$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)} \times \frac{k}{s} = \frac{k}{s(s+0.1)(s+1)}$$



a $k = 1$ の場合　　b $k = 0.08$ の場合　　c $k = 0.08$ の場合の拡大図

- $D_p(s)D_c(s) = s(s+0.1)(s+1)$　　開ループ極は 0, 残りは安定
- ベクトル軌跡は点 $-1 + j0$ を左手に見て原点へと収束．安定．

フィードバック vs フィードフォワード

フィードバック制御系の安定性

11/26 中間試験

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法: 準備
- ナイキストの安定判別法: 使い方
- ナイキストの安定判別法: 導出
- 簡略化されたナイキストの安定判別法
- 安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

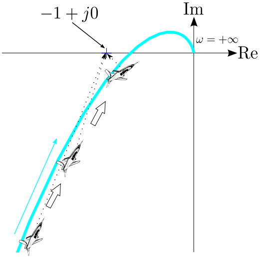
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計

二自由度制御系

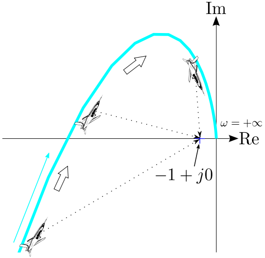
01/28 期末試験

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

簡略化されたナイキストの安定判別法

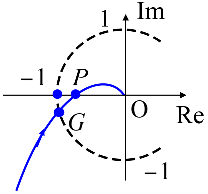


a 常に左手に見ているので 安定

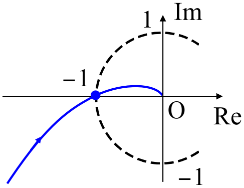


b 右手に見ることがあるので 不安定

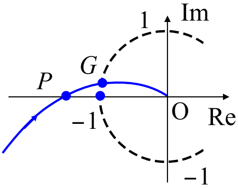
安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定

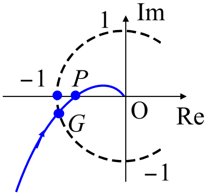


b 安定と不安定の間

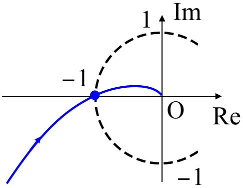


c 不安定

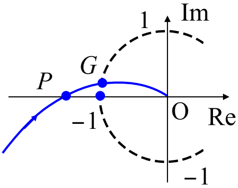
安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



b 安定と不安定の間

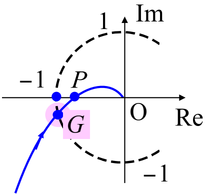


c 不安定

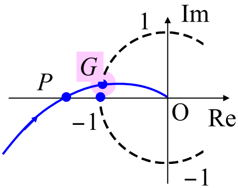
ゲイン交差周波数 ω_{gc} :　　$|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ となる周波数 ω

位相交差周波数 ω_{pc} :　　$\angle L(j\omega_{\mathrm{pc}}) = -180$ deg となる周波数 ω

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



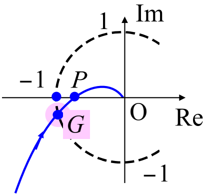
a 安定



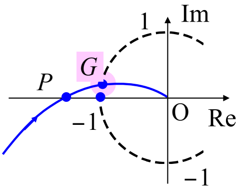
b 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} :　$|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ となる周波数 ω

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定

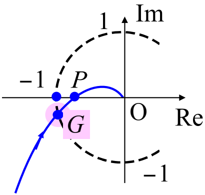


b 不安定

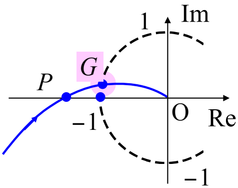
ゲイン交差周波数 ω_{gc} :　$|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ となる周波数 ω

安定 $|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ のときに, $\angle L(j\omega_{\mathrm{gc}}) > -180$ deg
もっと位相が遅れても大丈夫:　位相余裕

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



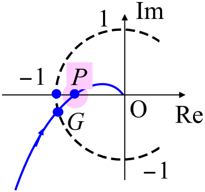
b 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} :　$|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ となる周波数 ω

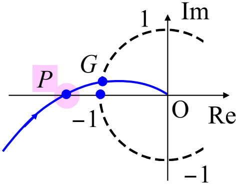
安定 $|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ のときに, $\angle L(j\omega_{\mathrm{gc}}) > -180$ deg
もっと位相が遅れても大丈夫:　位相余裕

不安定 $|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ のときに, $\angle L(j\omega_{\mathrm{gc}}) < -180$ deg

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



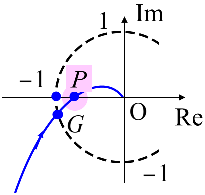
a 安定



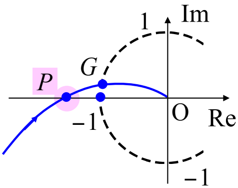
b 不安定

位相交差周波数 ω_{pc} :　$\angle L(j\omega_{\mathrm{pc}}) = -180$ deg となる周波数 ω

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定

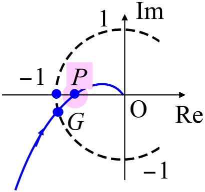


b 不安定

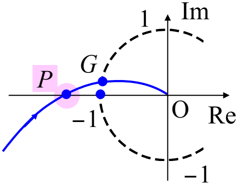
位相交差周波数 $\omega_{\rm pc}$:　$\angle L(j\omega_{\rm pc}) = -180$ deg となる周波数 ω

安定 $\angle L(j\omega_{\rm pc}) = -180$ deg のときに, $|L(j\omega_{\rm pc})| < 1$
もっとゲインが大きくなっても大丈夫:　ゲイン余裕

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a 安定



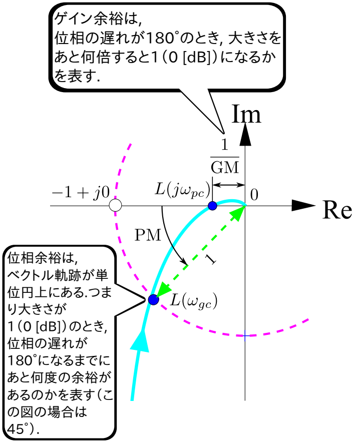
b 不安定

位相交差周波数 ω_{pc} : $\quad \angle L(j\omega_{\mathrm{pc}}) = -180$ deg **となる周波数** ω

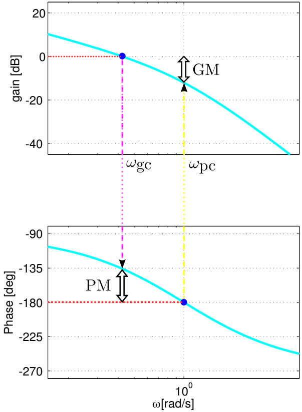
安定 $\angle L(j\omega_{\mathrm{pc}}) = -180$ deg **のときに,** $|L(j\omega_{\mathrm{pc}})| < 1$
もっとゲインが大きくなっても大丈夫: ゲイン余裕

不安定 $\angle L(j\omega_{\mathrm{pc}}) = -180$ deg **のときに,** $|L(j\omega_{\mathrm{pc}})| > 1$

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕

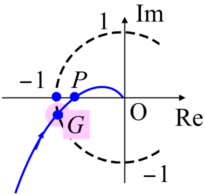


a ベクトル軌跡での読み取り

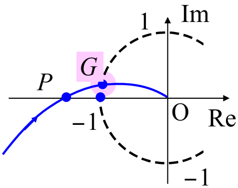


b ボード線図での読み取り

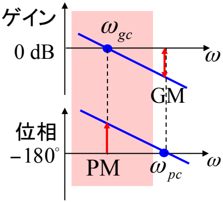
安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



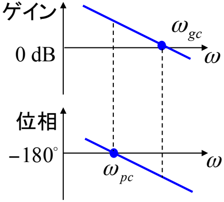
a 安定



b 不安定



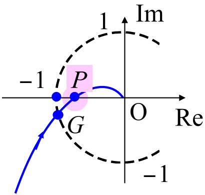
a 安定



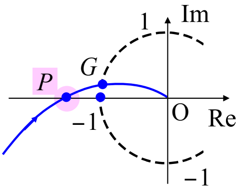
b 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} : $|L(j\omega_{\mathrm{gc}})| = 1$ となる周波数 ω

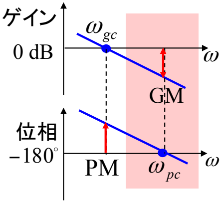
安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



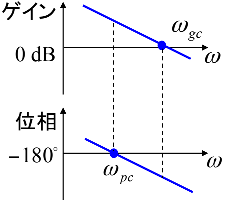
a 安定



b 不安定



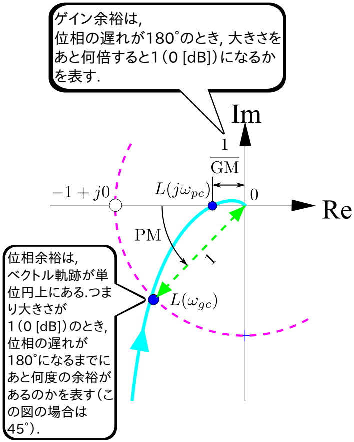
a 安定



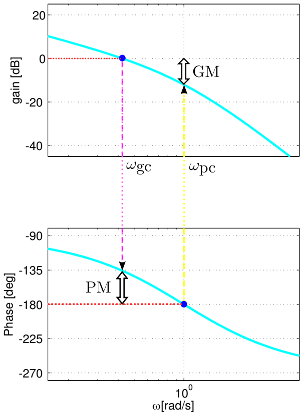
b 不安定

位相交差周波数 $\omega_{\rm pc}$: $\angle L(j\omega_{\rm pc}) = -180$ deg となる周波数 ω

安定余裕: ゲイン余裕と位相余裕



a ベクトル軌跡での読み取り



b ボード線図での読み取り

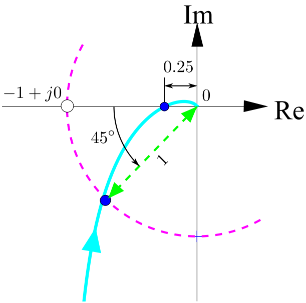
例題 13.8

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{0.5}{s}$$

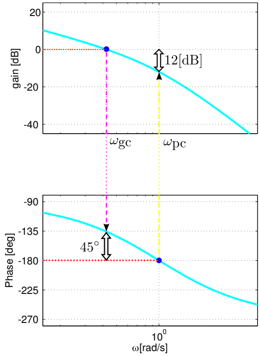
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times s$ 　　簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる

例題 13.8

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{0.5}{s}$$



a ベクトル軌跡



b ボード線図

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times s$ 簡略化されたナイキストの安定判別法が適用できる

例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

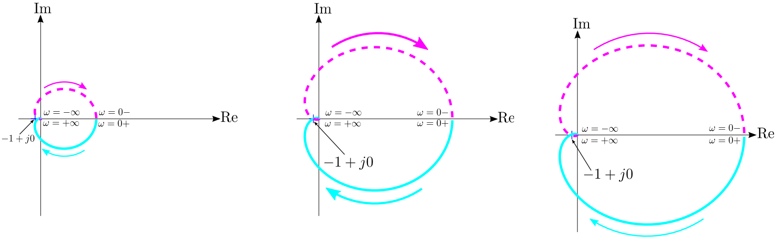
- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$ **不安定な開ループ極の数**: $P = 0$

例題 13.4

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1}$$

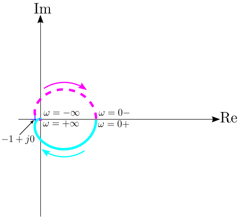
$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \times \frac{k}{s+0.1} = \frac{k}{(s+0.1)(s+1)^2}$$

- $D_p(s)D_c(s) = (s+1)^2 \times (s+0.1)$　不安定な開ループ極の数: $P = 0$

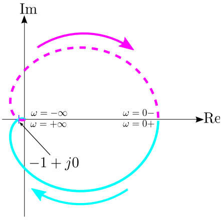


a $k = 1$ の場合　b $k = 2.4$ の場合　c $k = 3$ の場合

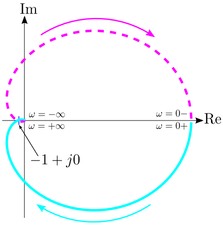
例題 13.4



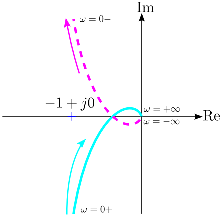
a $k = 1$ の場合



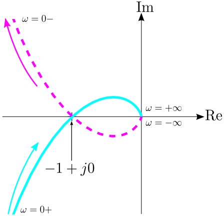
b $k = 2.4$ の場合



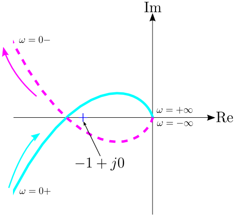
c $k = 3$ の場合



a $k = 1$ の場合

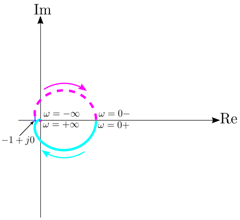


b $k = 2.4$ の場合

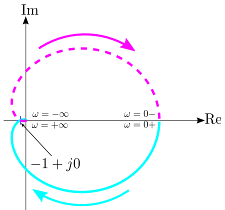


c $k = 3$ の場合

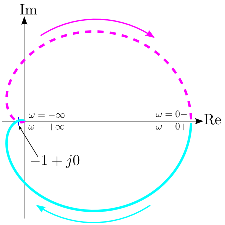
例題 13.4



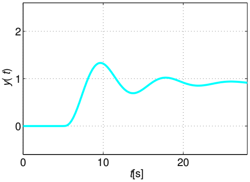
a $k = 1$ の場合



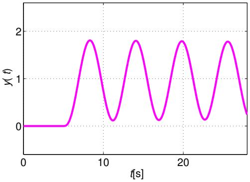
b $k = 2.4$ の場合



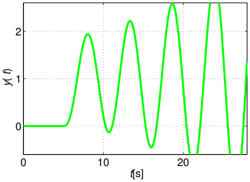
c $k = 3$ の場合



a $k = 1$ の場合



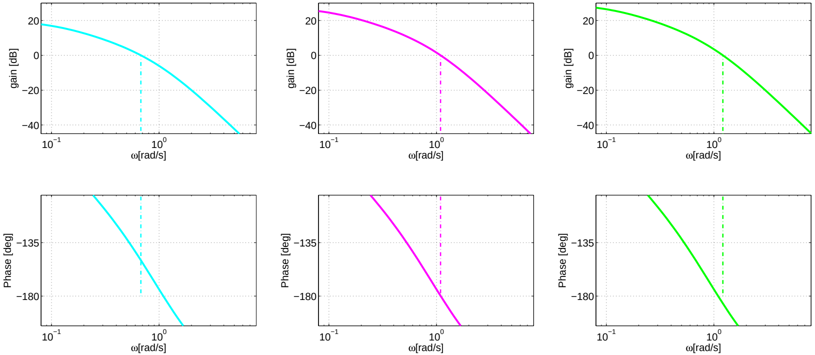
b $k = 2.4$ の場合



c $k = 3$ の場合

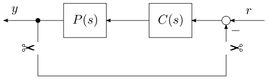
例題 13.9

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad C(s) = \frac{k}{s+0.1} \qquad k = 1, 2.4, 3$$



a $k = 1$ の場合　b $k = 2.4$ の場合　c $k = 3$ の場合

フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

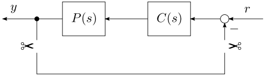


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$

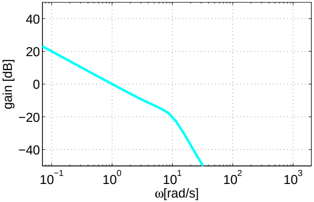
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

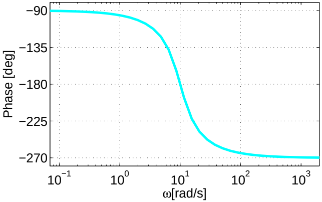


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

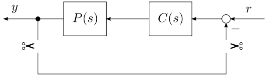
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$





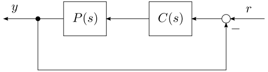
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

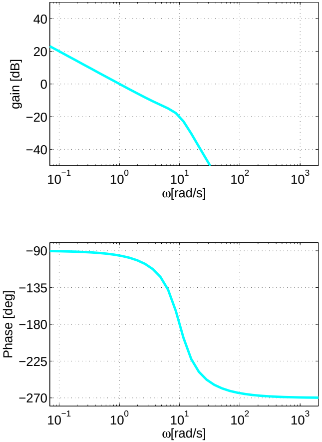


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

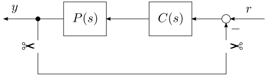
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

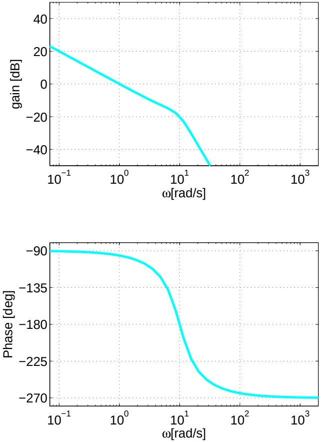
$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$





フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

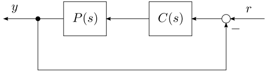


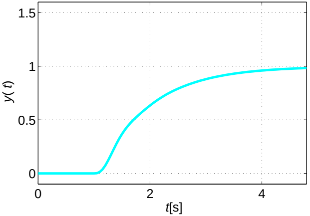


$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

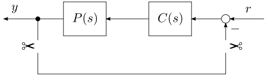
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1$$





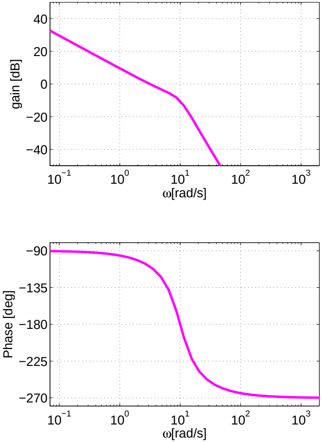
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える



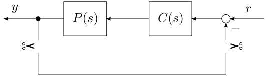
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3$$



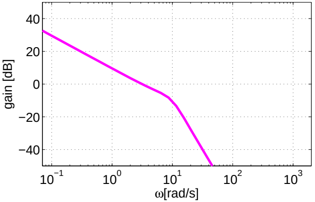
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

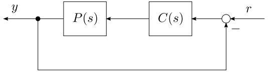


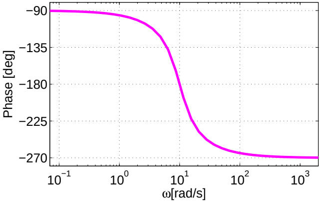
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

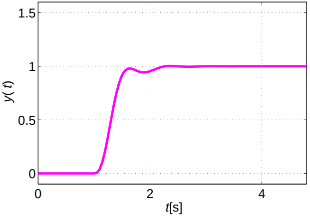
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3$$

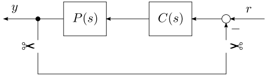


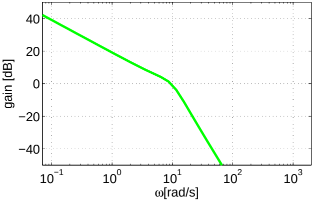






フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

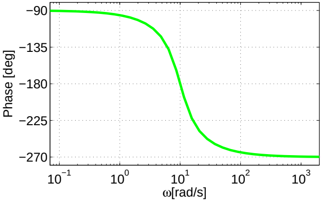




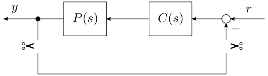
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3, 9$$



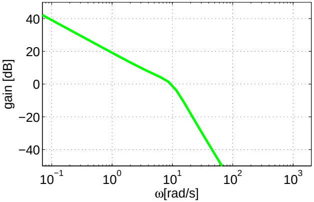
フィードバック制御系の安定性: 安定余裕を考える

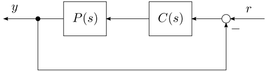


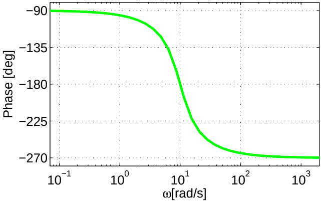
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

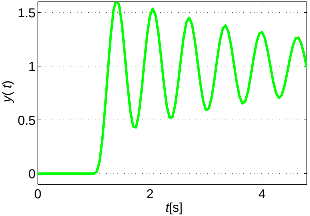
$$K = 1 \quad \omega_n = 10 \quad \zeta = 0.5$$

$$C(s) = \frac{k}{s} \qquad k = 1, 3, 9$$









フィードバック vs フィードフォワード
フィードバック制御系の安定性
12/03 中間試験

ナイキストの安定判別法
ループ整形法によるフィードバック制御系の設計
二自由度制御系
01/28 期末試験