

システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/10 中間試験

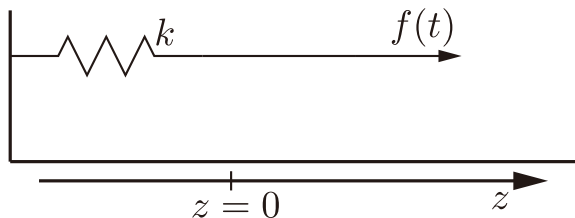
動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

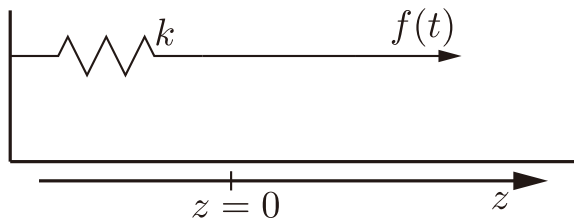
07/29 期末試験

静的なシステム



- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

静的なシステム

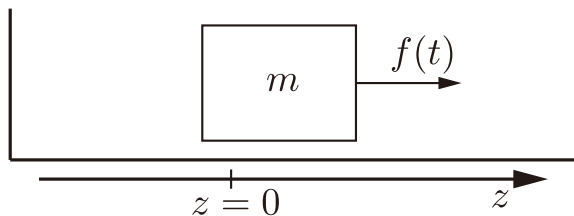


- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

$$kz(t) = u(t)$$

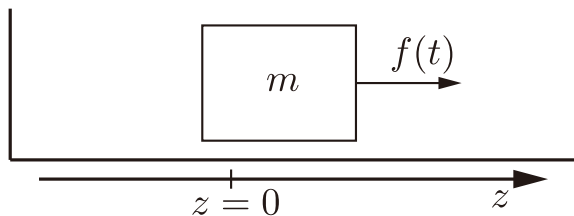
- ただし $u = f$

動的なシステム



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

動的なシステム

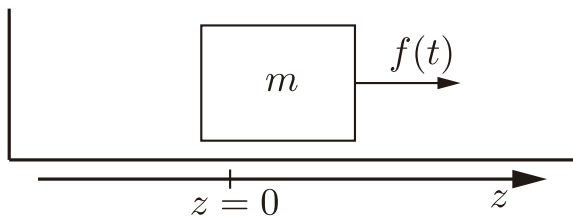


- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

動的なシステム



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

(動的なシステム) = (微分方程式で記述されるシステム)

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

動的なシステム

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

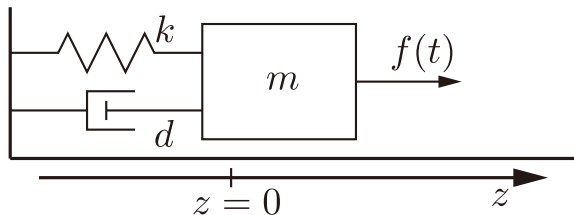
$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

本当に解か, 確認

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \frac{d}{dt} \left(z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} z_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \\ &= 0 + u(t) = u(t)\end{aligned}$$

微分方程式によるモデリング

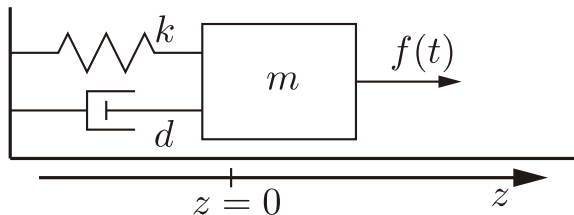
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

微分方程式によるモデリング

マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = f$

ブロック線図による表現: その 1

マス-バネ-ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

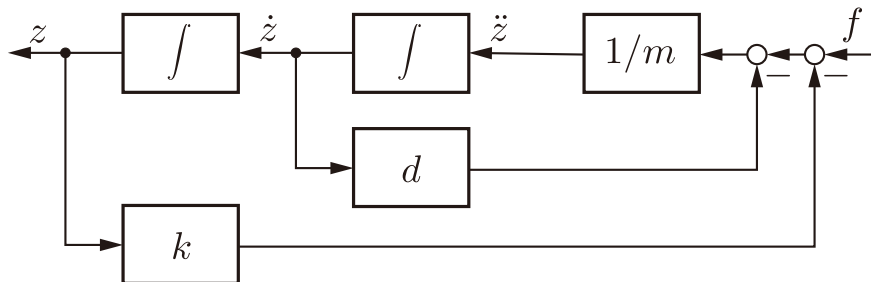
$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

ブロック線図による表現: その 1

マス-バネ-ダンパ系

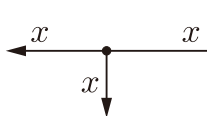
$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

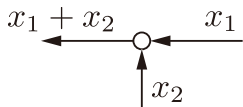


ブロック線図の主要要素

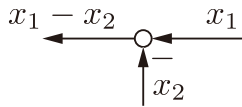
ブロック線図による表現: その1



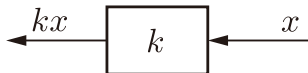
a 引き出し点



b 加え合わせ点, 足し算の場合



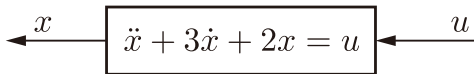
c 加え合わせ点, 引き算の場合



d 信号の定数倍



e 信号の積分



f u を入力とする動的なシステム

ブロック線図による表現: その 1

マス-バネ-ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

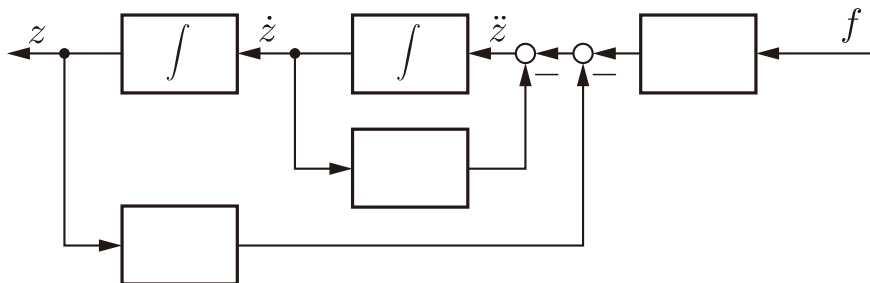
ブロック線図による表現: その 1

マス-バネ-ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$



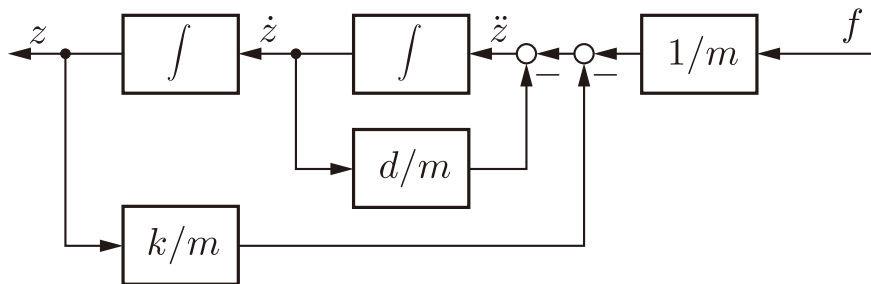
ブロック線図による表現: その 1

マス-バネ-ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$



状態空間表現によるモデリング

マス-バネ-ダンパ系

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

変数 $x = [x_1 \quad x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ を定義:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

状態空間表現によるモデリング

マス-バネ-ダンパ系

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

変数 $x = [x_1 \quad x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ を定義:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) &= -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}f(t) \\ &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{aligned}$$

状態空間表現によるモデリング

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)\end{aligned}$$

状態空間表現によるモデリング

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{d}{m}x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)\end{aligned}$$

$$z(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= [z_0 \quad v_0]^T \\ z(t) &= Cx(t) & t &\geq t_0\end{aligned}$$

状態空間表現によるモデリング

マス - バネ - ダンパ系の状態空間表現:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = [z_0 \quad v_0]^T$$

$$z(t) = Cx(t) \quad t \geq t_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad u = f$$

状態空間表現の一般形

状態空間表現によるモデリング

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0$$

$$z(t) = Cx(t) \quad t \geq t_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

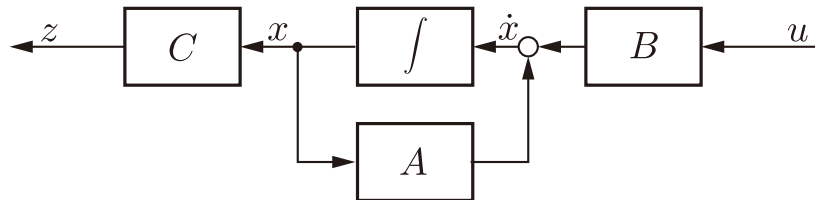
入力 u 出力 z 状態変数 $x \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

n 次元の状態空間表現 (実現) = 状態方程式 + 出力方程式

状態空間表現のブロック線図

状態空間表現によるモデリング



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/10 中間試験

動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/29 期末試験

伝達関数によるモデリング

ラプラス変換:

$$\mathcal{L}[\dot{z}(t)] = sz(s) - z(0)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{z}(t)] = s^2z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

伝達関数によるモデリング

ラプラス変換:

$$\mathcal{L}[\dot{z}(t)] = sz(s) - z(0)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{z}(t)] = s^2z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

マス - バネ - ダンパ系:

- 初期条件を $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 0$ と仮定して

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}[m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$m\mathcal{L}[\ddot{z}(t)] + d\mathcal{L}[\dot{z}(t)] + k\mathcal{L}[z(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$ms^2z(s) + dsz(s) + kz(s) = f(s)$$

$$(ms^2 + ds + k)z(s) = f(s)$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$

伝達関数の一般形

伝達関数によるモデリング

$$z(s) = G(s)u(s)$$

$$G(s) = \frac{b_{n_n}s^{n_n} + b_{n_n-1}s^{n_n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1}s^{n_d-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad n_n < n_d$$

$$N(s) = b_{n_n}s^{n_n} + b_{n_n-1}s^{n_n-1} + \dots + b_1s + b_0$$

$$D(s) = s^{n_d} + a_{n_d-1}s^{n_d-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

零点: $N(s) = 0$ の根

極: $D(s) = 0$ の根

伝達関数の極 p_i と零点 z_j

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

零点: $N(s) = 0$ の根

極: $D(s) = 0$ の根

$$N(s) = b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$= b_{n_n} (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{n_n})$$

$$D(s) = s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$= (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n_d})$$

$$Z(G) = \{ \text{伝達関数 } G \text{ の零点の全体} \}$$

$$= \{ z_1, z_2, \dots, z_{n_n} \}$$

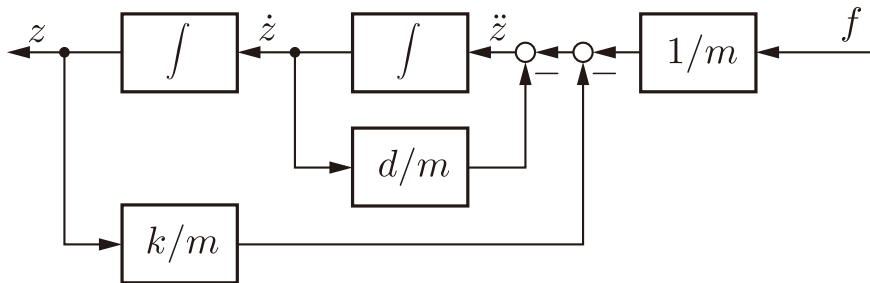
$$P(G) = \{ \text{伝達関数 } G \text{ の極の全体} \}$$

$$= \{ p_1, p_2, \dots, p_{n_d} \}$$

ブロック線図による表現: その 2

マス-バネ-ダンパ系

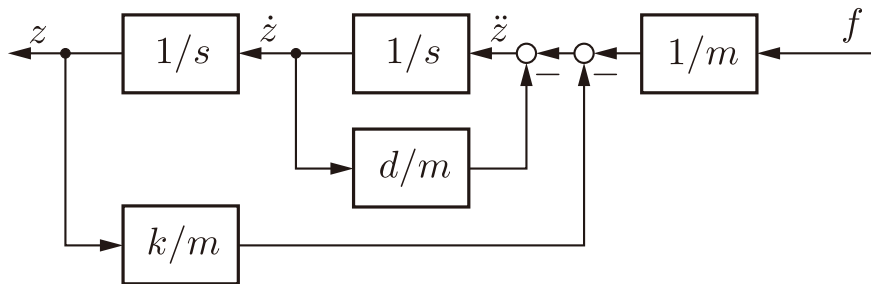
$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$



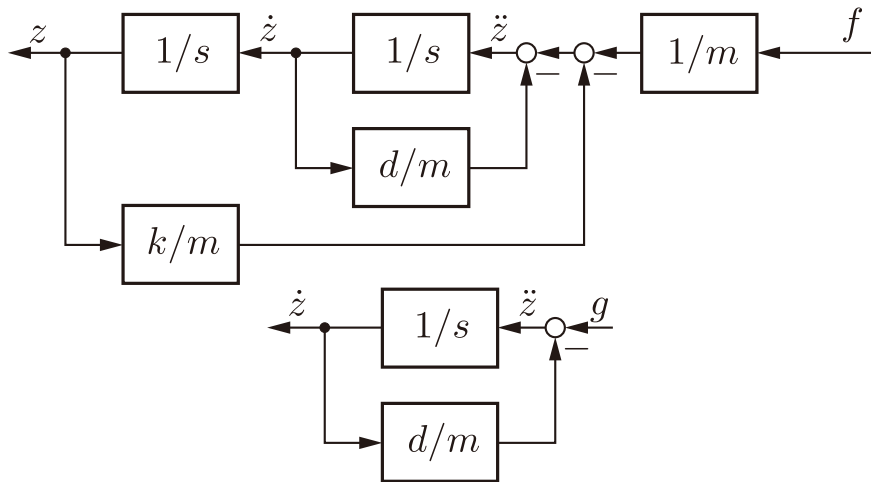
ブロック線図による表現: その 2

マス-バネ-ダンパ系

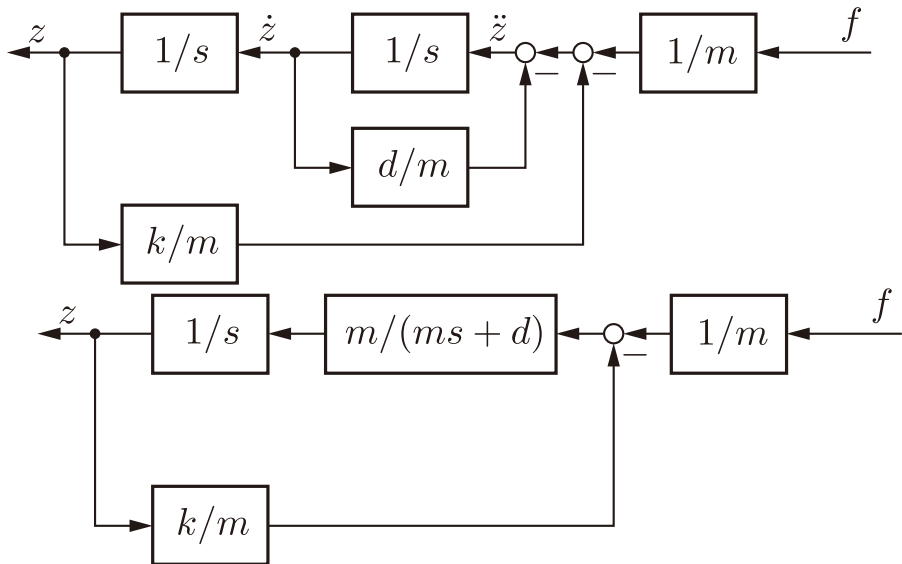
$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$



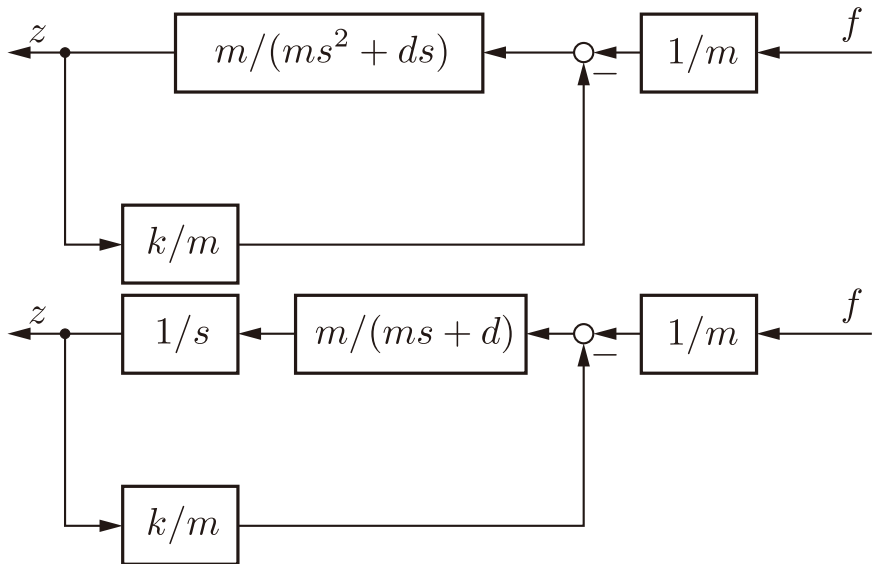
ブロック線図による表現: その 2



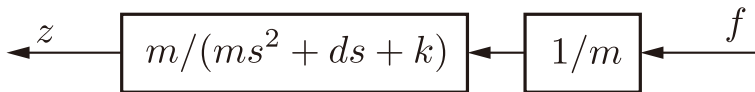
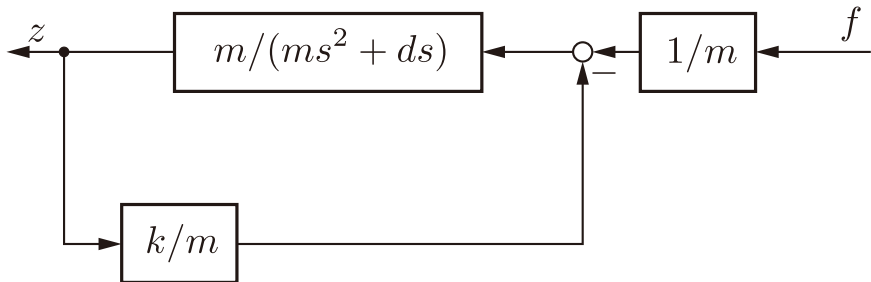
ブロック線図による表現: その 2



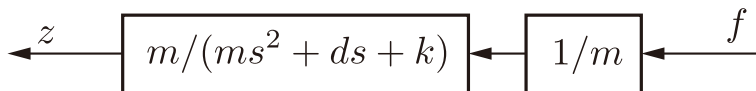
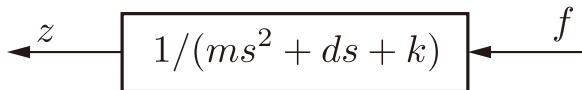
ブロック線図による表現: その 2



ブロック線図による表現: その 2



ブロック線図による表現: その 2



マス-バネ-ダンパ系

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

- 初期条件を $x(0) = 0$ と仮定して

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)]$$

$$sx(s) - x(0) = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]$$

$$sx(s) = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)]$$

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$sx(s) - Ax(s) = Bu(s)$$

$$(sI - A)x(s) = Bu(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

- 初期条件を $x(0) = 0$ と仮定して

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)]$$

$$sx(s) - x(0) = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]$$

$$sx(s) = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)]$$

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$sx(s) - Ax(s) = Bu(s)$$

$$(sI - A)x(s) = Bu(s)$$

$$(sI - A)^{-1}(sI - A)x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$Ix(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$\mathcal{L}[z(t)] = \mathcal{L}[Cx(t)]$$

$$z(s) = C\mathcal{L}[x(t)]$$

$$z(s) = Cx(s)$$

$$z(s) = Cx(s)$$

$$= C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

状態空間表現と伝達関数

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

$$z(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

マス - バネ - ダンパ系

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

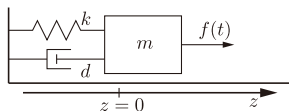
$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{d}{m} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{d}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

状態空間表現と伝達関数

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\&= [1 \quad 0] \frac{1}{s(s + \frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{d}{m} + \frac{k}{m})} [s + \frac{d}{m} \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{d}{m}) + \frac{k}{m}} \frac{1}{m} \\&= \frac{1}{ms^2 + ds + k}\end{aligned}$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad \text{微分方程式}$$



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現



- 表現: ブロック線図による表現は、とても大切です
- ← $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- → 実現問題

ちょっとまとめ

状態空間表現と伝達関数

状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

伝達関数

$$z(s) = G(s)u(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= C \left[\frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) \right] B \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \text{adj}(sI - A) B \end{aligned}$$

練習

状態空間表現と伝達関数

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B \end{aligned}$$

答え 1

状態空間表現と伝達関数

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+2) + 1 = (s+1)(s+1)$$

$$\text{adj}(sI - A) = \text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

答え 1

状態空間表現と伝達関数

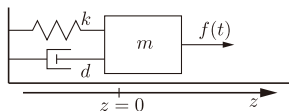
$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B \\&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} [s+2 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} (-s-1) \\&= \frac{-(s+1)}{(s+1)(s+1)} = -\frac{1}{(s+1)}\end{aligned}$$

答え 2

状態空間表現と伝達関数

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B \\&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{(s+1)(s+1)} [s+2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+1)} 1 \\&= \frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad \text{微分方程式}$$



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数



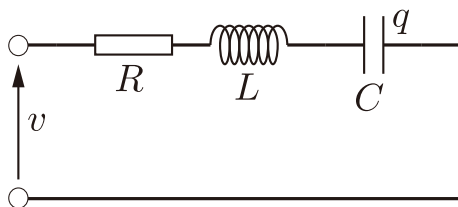
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現



- 表現: ブロック線図による表現は、とても大切です
- ← $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- → 実現問題

RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H]
- 抵抗の抵抗値: R [Ω]
- コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $q(t_0) = q_0$ [q] $\dot{q}(t_0) = 0$ [A]

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

RLC 回路

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

RLC 回路

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = v$

RLC 回路

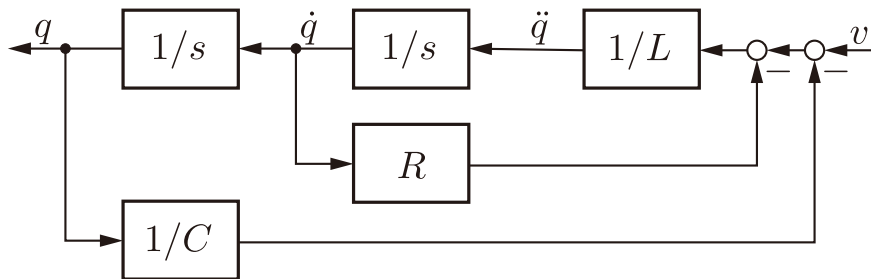
$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t)\right)$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t)\right)$$



RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{C} q(t) - R\dot{q}(t) + v(t) \right)$$

状態変数 $x = [x_1 \quad x_2]^T = [q \quad \dot{q}]^T$

RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{C} q(t) - R\dot{q}(t) + v(t) \right)$$

状態変数 $x = [x_1 \quad x_2]^T = [q \quad \dot{q}]^T$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} v(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

RLC 回路

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{C} q(t) - R \dot{q}(t) + v(t) \right)$$

状態変数 $x = [x_1 \quad x_2]^T = [q \quad \dot{q}]^T$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} v(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = [q_0 \quad 0]^T$$

$$z(t) = Cx(t) \quad t \geq t_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad u = v$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

- 初期条件を $q(t_0) = 0, \dot{q}(t_0) = 0, t_0 = 0$ と仮定して

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

$$\mathcal{L}[L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)] = \mathcal{L}[v(t)]$$

$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})q(s) = v(s)$$

RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

- 初期条件を $q(t_0) = 0, \dot{q}(t_0) = 0, t_0 = 0$ と仮定して

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

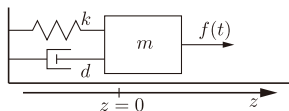
$$\mathcal{L}[L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)] = \mathcal{L}[v(t)]$$

$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})q(s) = v(s)$$

$$q(s) = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}v(s)$$

$$G(s) = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad \text{微分方程式}$$



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数



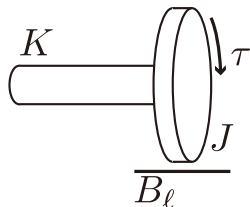
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現



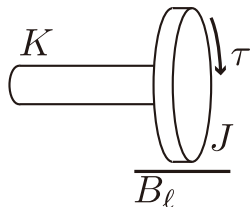
- 表現: ブロック線図による表現は、とても大切です
- ← $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- → 実現問題

回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm] (入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad] $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない

回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm] (入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad] $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

- ただし $u = \tau$

回転運動

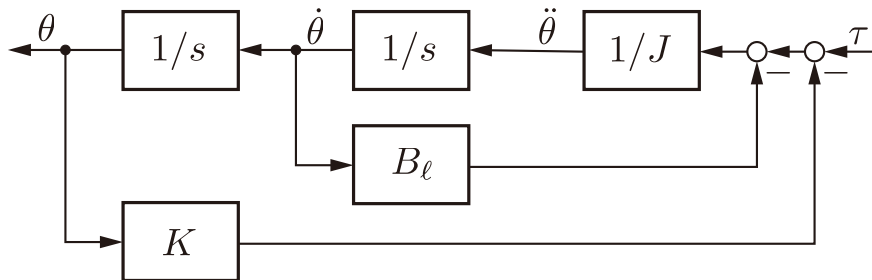
$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

回転運動

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$



回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$

回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{K}{J}x_1(t) - \frac{B_\ell}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}\tau(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau(t)$$

回転運動

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$

状態変数を $x = [x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{K}{J}x_1(t) - \frac{B_\ell}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}\tau(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = [\theta_0 \quad \omega_0]^T$$

$$z(t) = Cx(t) \quad t \geq t_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad u = \tau$$

回転運動

ラプラス変換 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = s\left(s + \frac{B_\ell}{J}\right) + \frac{K}{J}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix}$$

回転運動

ラプラス変換 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = s\left(s + \frac{B_\ell}{J}\right) + \frac{K}{J}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{B_\ell}{J} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s\left(s + \frac{B_\ell}{J}\right) + \frac{K}{J}} \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

回転運動

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\&= [1 \quad 0] \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{B_\ell}{J} & 1 \\ -\frac{K}{J} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J} + \frac{K}{J})} \left[s + \frac{B_\ell}{J} \quad 1 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\&= \frac{1}{s(s + \frac{B_\ell}{J}) + \frac{K}{J}} \frac{1}{J} \\&= \frac{1}{Js^2 + B_\ell s + K}\end{aligned}$$

システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/10 中間試験

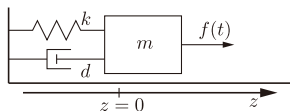
動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/29 期末試験

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad \text{微分方程式}$$



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現

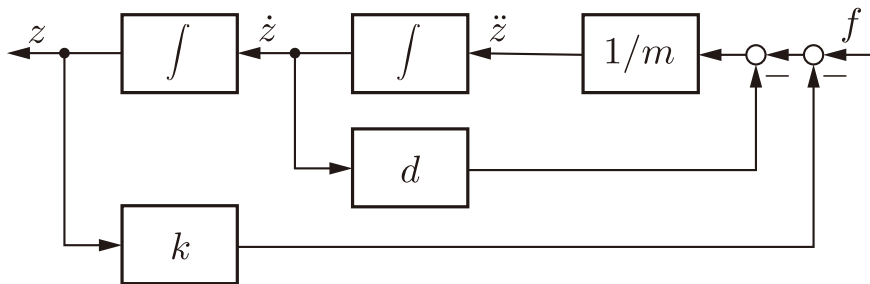


- 表現: ブロック線図による表現は、とても大切です
- ← $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- → 実現問題

マス-バネ-ダンパ系

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

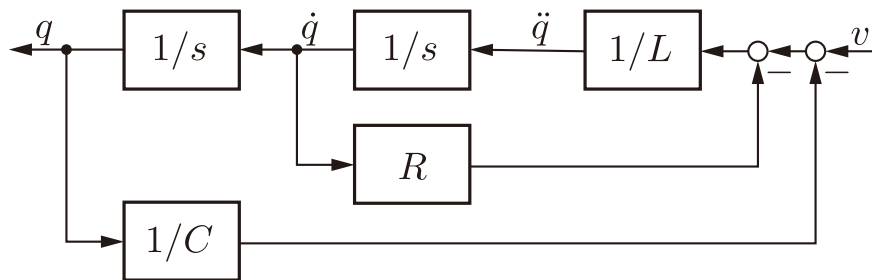
$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}(-kz(t) - d\dot{z}(t) + f(t))$$



RLC 回路

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

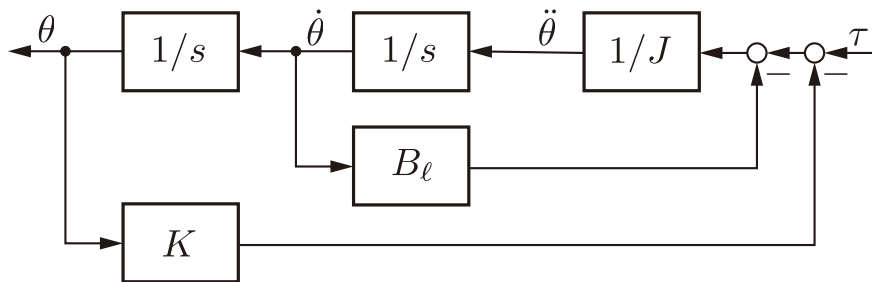
$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}q(t) - R\dot{q}(t) + v(t)\right)$$



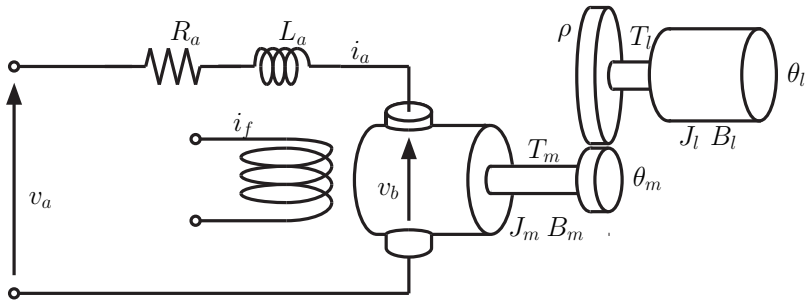
回転運動

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(-K\theta(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) + \tau(t))$$



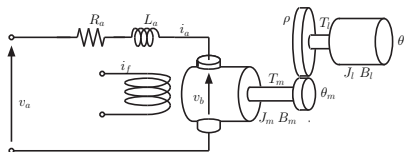
DC モータ



記号	単位	意味
θ_m	[rad]	モータ回転角
ω_m	[rad/s]	モータ角速度
v_a	[V]	電機子電圧
i_a	[A]	電機子電流
L_a	[H]	電機子インダクタンス
R_a	[Ω]	電機子抵抗
T_m	[Nm]	モータ発生トルク
k_T	[Nm/A]	トルク定数
v_b	[V]	逆起電力
k_b	[Vs/rad]	逆起電力定数

記号	単位	意味
J_m	[kgm ²]	モータ側慣性モーメント
B_m	[Nms/rad]	モータ側粘性抵抗
A	-	アンプ増幅率
u	[V]	入力電圧
ρ	-	減衰比
θ_l	[rad]	負荷回転角
ω_l	[rad/s]	負荷角速度
T_l	[Nm]	負荷側トルク
J_l	[kgm ²]	負荷側慣性モーメント
B_l	[Nms/rad]	負荷側粘性抵抗

DC モータ



$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b$$

$$v_b = k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m$$

$$v_a = Au \quad (u \text{ 入力})$$

$$T_m = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell$$
$$= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell$$

$$T_m = k_T i_a$$

$$T_\ell = J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt}$$

$$= J_\ell \dot{\omega}_\ell(t) + B_\ell \omega_\ell(t)$$

$$\theta_m = \rho \theta_\ell \quad (z = \theta_\ell \text{ 出力})$$

$$\omega_m = \dot{\theta}_m = \rho \dot{\theta}_\ell = \rho \omega_\ell$$

DC モータ

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b$$

$$v_b = k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m$$

$$v_a = Au \quad (u \text{ 入力})$$

$$\begin{aligned} T_m &= J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell \\ &= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell \end{aligned}$$

$$T_m = k_T i_a$$

$$\begin{aligned} T_\ell &= J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt} \\ &= J_\ell \dot{\omega}_\ell(t) + B_\ell \omega_\ell(t) \end{aligned}$$

$$\theta_m = \rho \theta_\ell \quad (z = \theta_\ell \text{ 出力})$$

$$\omega_m = \dot{\theta}_m = \rho \dot{\theta}_\ell = \rho \omega_\ell$$

DC モータ

$$i_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a} (v_a(s) - v_b(s))$$

$$v_b(s) = k_b \omega_m(s)$$

$$v_a(s) = Au(s)$$

$$\omega_m(s) = \frac{1}{J_m s + B_m} (T_m(s) - T_\ell(s))$$

$$T_m(s) = k_T i_a(s)$$

$$T_\ell(s) = (J_\ell s + B_\ell) \omega_\ell(s)$$

$$\omega_\ell(s) = \frac{1}{\rho} \omega_m(s)$$

$$\theta_\ell(s) = \frac{1}{s} \omega_\ell(s)$$

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + v_b$$

$$v_b = k_b \frac{d\theta_m}{dt} = k_b \omega_m$$

$$v_a = Au \quad (u \text{ 入力})$$

$$T_m = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_\ell$$

$$= J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + T_\ell$$

$$T_m = k_T i_a$$

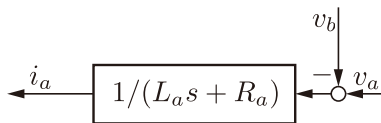
$$T_\ell = J_\ell \frac{d^2\theta_\ell}{dt^2} + B_\ell \frac{d\theta_\ell}{dt}$$

$$= J_\ell \dot{\omega}_m(t) + B_\ell \omega_\ell(t)$$

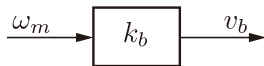
$$\theta_m = \rho \theta_\ell \quad (z = \theta_\ell \text{ 出力})$$

$$\omega_m = \dot{\theta}_m = \rho \dot{\theta}_\ell = \rho \omega_\ell$$

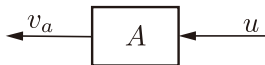
DC モータ



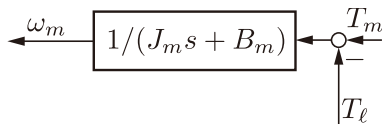
a 電気回路



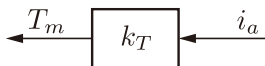
b 逆起電力



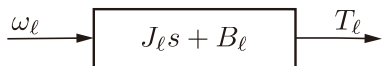
c アンプ



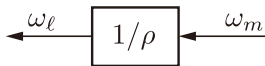
d 電機子回転運動



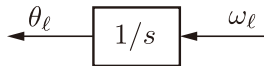
e 発生トルク



f 負荷回転運動

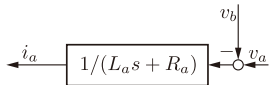


g 減速機

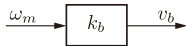


h 積分器

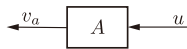
DC モータ



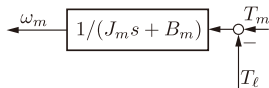
a 電気回路



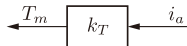
b 逆起電力



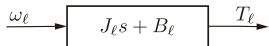
c アンプ



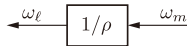
d 電機子回転運動



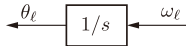
e 発生トルク



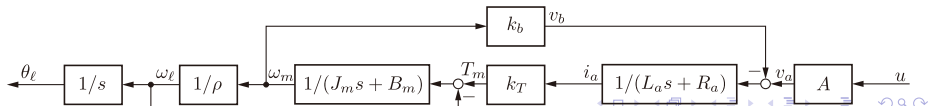
f 負荷回転運動



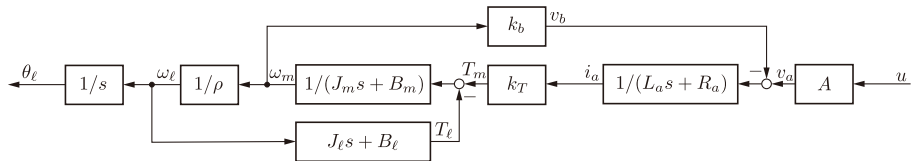
g 減速機



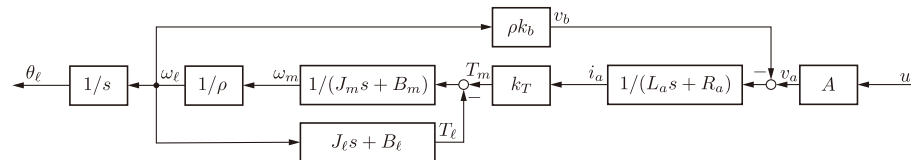
h 積分器



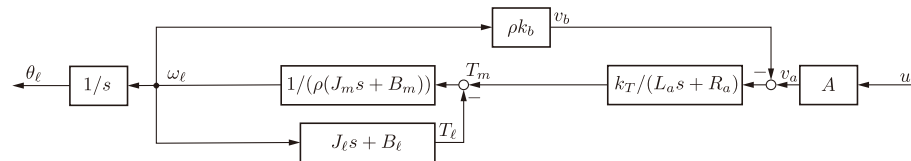
DC モータ



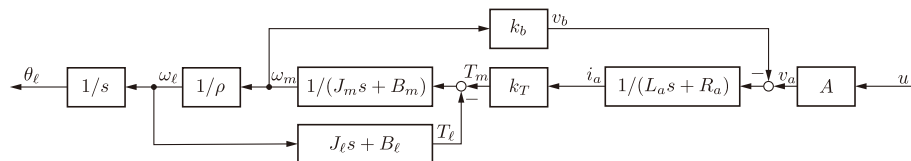
a ブロック線図の変形 1



b ブロック線図の変形 2



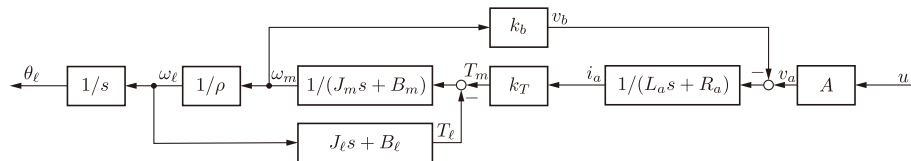
DC モータ



$$z(s) = G(s)u(s)$$

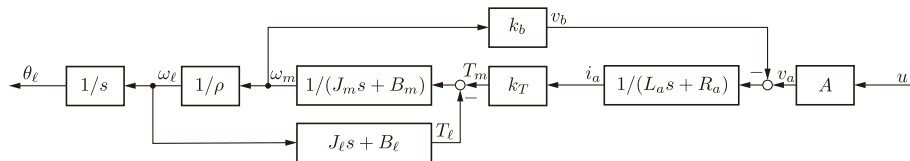
$$G(s) = \frac{k_T A}{s(((\rho J_m + J_l)s + (\rho B_m + B_l))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b)}$$

DC モータ



$$G(s) = \frac{k_T A}{s ((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b}$$

DC モータ



$$G(s) = \frac{k_T A}{s(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))(L_a s + R_a) + \rho K_T k_b)}$$

$L_a = 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k_T A}{s(((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell))R_a + \rho K_T k_b)} \\ &= \frac{k_T A / R_a}{s((\rho J_m + J_\ell)s + (\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b / R_a)} \\ &= \frac{k_T A / R_a}{(\rho J_m + J_\ell)s^2 + ((\rho B_m + B_\ell) + \rho K_T k_b / R_a)s} \end{aligned}$$

DC モータ

$$G(s) = \frac{k_T A / R_a}{(\rho J_m + J_l) s^2 + ((\rho B_m + B_l) + \rho K_T k_b / R_a) s}$$

$$K = \frac{k_T A}{R_a} \quad J = \rho J_m + J_l \quad B = \rho B_m + B_l + \frac{\rho k_T k_b}{R_a}$$

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

DC モータ

$$G(s) = \frac{k_T A / R_a}{(\rho J_m + J_l) s^2 + ((\rho B_m + B_l) + \rho K_T k_b / R_a) s}$$

$$K = \frac{k_T A}{R_a} \quad J = \rho J_m + J_l \quad B = \rho B_m + B_l + \frac{\rho k_T k_b}{R_a}$$

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s}$$

さらに $G(s) = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s}$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}, \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$$

システム制御工学Ⅰ 動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/10 中間試験

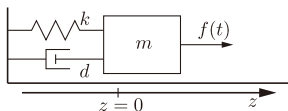
動的なシステムの安定性

動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/29 期末試験

動的なシステムのモデリングと表現



動的なシステム



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \quad \text{微分方程式}$$



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} u(s)$$

伝達関数



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

状態空間実現



- 表現: ブロック線図による表現は、とても大切です
- ← $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- → 実現問題