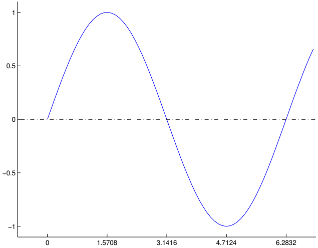
システム制御工学 I　動的なシステムの解析

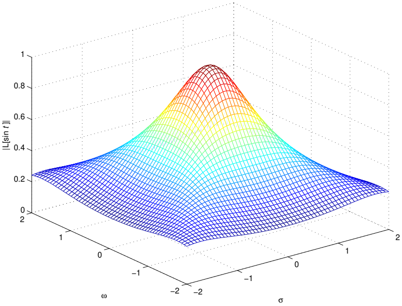
動的なシステムのモデリングと表現
ラプラス変換の復習
動的なシステムの応答
06/10 中間試験

動的なシステムの安定性
動的なシステムの周波数応答
周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/29 期末試験

ラプラス変換の復習



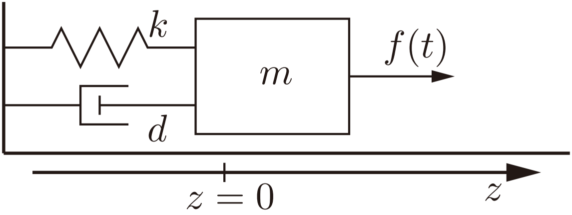
$\sin t$



$|\mathcal{L}[\,\sin t\,]|$

なぜラプラス変換を考えるのか

マス–バネ–ダンパ系

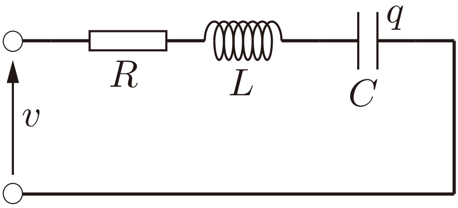


$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \qquad u = f$$

- **外部から加わる力**: $f(t)$ $[\,\mathrm{N}\,]$ **入力 (原因)**
- **質点の位置**: $z(t)$ $[\,\mathrm{m}\,]$ **出力 (結果)**

なぜラプラス変換を考えるのか

RLC 回路

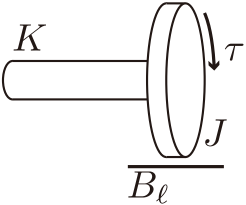


$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \qquad u = v$$

- 加える電圧: $v(t)$ $[\,\mathrm{V}\,]$ 入力
- コンデンサに蓄えられる電荷: q $[\,\mathrm{C}\,]$ 出力

なぜラプラス変換を考えるのか

回転運動



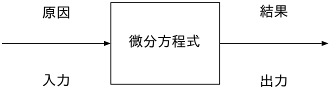
$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \qquad u = \tau$$

- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm]　　**入力**
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad]　　**出力**

なぜラプラス変換を考えるのか

工学の問題の多くは, 微分方程式で記述される

- 機械, 電気, 材料, 熱, 流体, 生物, 通信, 金融 などなど



Engineer は, 微分方程式を解きたい

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:　$\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:　$\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0 (t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$$

表の世界	入力 $u(t)$	$\longrightarrow$	微分方程式	$\longrightarrow$	出力 $x(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	ラプラス変換				逆ラプラス変換
	$\downarrow$				$\uparrow$
裏の世界	$u(s)$	$\longrightarrow$	代数方程式	$\longrightarrow$	$x(s)$

ラプラス変換の定義

定義: ラプラス変換
時間関数 $x(t)$, $t \geq 0$ (ただし $t < 0$ の時は $x(t) = 0$ とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$x(t)$: 時間関数　　$x(s)$: $x(t)$ のラプラス変換

s : 複素数 $s = \sigma + j\omega$

より正確には　$\mathcal{L}_-[\, x(t)\,] = \int_{0-}^\infty x(t)e^{-st}dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^\infty x(t)e^{-st}dt$

注 意

ラプラス変換の定義

本来なら関数 $x(t)$ のラプラス変換を表す記号

$$X(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] \qquad \tilde{x}(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$$

- 記号が煩雑になる
- 関数 $x(t)$ を考えているのか, あるいはそのラプラス変換 $x(s)$ を考えているのかは, 前後の文脈から明らか

あえて $x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$ のように表記する.

ラプラス変換の定義

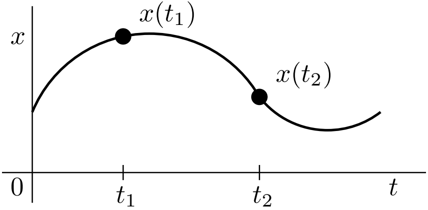
$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

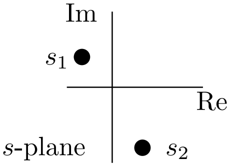
t : 時間 (実数)　　$x(t)$: 各 t に対して $x(t)$ は実数

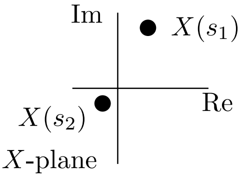
s : 複素数 $s = \sigma + j\omega$　　$x(s)$: 各 s に対して $x(s)$ は複素数

ラプラス変換: $\mathcal{L}[\,\cdot\,]$

$\Longrightarrow$





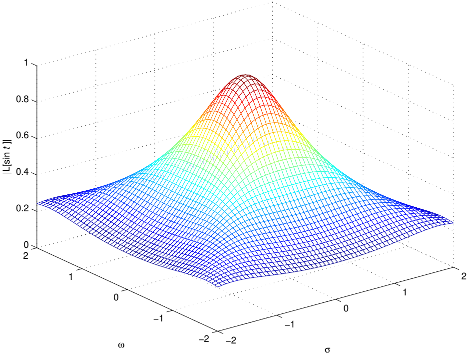


ラプラス変換の定義

例えば, $|x(s)|$ ならグラフにできる

例 題: $\sin t$ $\quad x(t) = \sin t \quad x(s) = \mathcal{L}[\,\sin t\,] = \dfrac{1}{s^2+1}$

$$|x(s)| = |x(\sigma + j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^2}}$$



$|\mathcal{L}[\,\sin t\,]|$

ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない
  - ラプラス変換の収束領域: $\mathrm{Re}[\, s\,] > \alpha$

ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない
  - ラプラス変換の収束領域: $\mathrm{Re}[\,s\,] > \alpha$

- 多くの関数 (指数オーダーの関数) がラプラス変換可能
- ラプラス変換の利用 (微分方程式を解く際に) 収束領域を陽に考慮する必要はない
  - ラプラス変換には, 深い理論があります. ぜひ, 参考図書に目をとおしてください.

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

ステップ関数: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[\,u(t)\,] = \frac{1}{s}$$

収束領域: $\mathrm{Re}[\,s\,] > 0$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

指数関数: e^{-at} **(**$a > 0$**)**

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

収束領域: $\mathrm{Re}[\, s\,] > -a$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

正弦関数: $\sin \omega t$

$$\mathcal{L}[\, \sin \omega t \,] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

余弦関数: $\cos \omega t$

$$\mathcal{L}[\, \cos \omega t \,] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

ランプ関数: $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\,r(t)\,] = \frac{1}{s^2}$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x)\dot{g}(x)dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x)dx$$

ラプラス変換の復習

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

インパルス関数: $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$\delta(t)$ **の性質:** $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (f(t):\ \text{時間関数})$$

$$\mathcal{L}[\,\delta(t)\,] = 1$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

線形性

$$\mathcal{L}[\, ax(t) + by(t)\,] = ax(s) + by(s)$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt} \,] = s x(s) - x(0)$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x) \dot{g}(x) dx = [\, f(x) g(x) \,]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x) g(x) dx$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt} \,] = sx(s) - x(0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2} \,] = \mathcal{L}[\, \frac{dy(t)}{dt} \,] &= sy(s) - y(0) \\
&= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0) \\
&= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)
\end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t) \,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt} \,] &= sx(s) - x(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2} \,] &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^3x(t)}{dt^3} \,] &= s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^4x(t)}{dt^4} \,] &= s^4x(s) - s^3x(0) - s^2\dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - \dddot{x}(0) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \qquad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \qquad y(0) = \int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\, \int_0^t x(\tau) d\tau \,] = \frac{1}{s} x(s)$$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau \,] = \mathcal{L}[\, \int_0^t y(\tau) d\tau \,] &= \frac{1}{s} y(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\, \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 \,] \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{s} x(s) = \frac{1}{s^2} x(s) \end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t) \,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t x(\tau) d\tau \,] &= \frac{1}{s} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^2} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^3} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} x(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^4} x(s) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

微 分: s をかけること

$$\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] = sx(s) - x(0)$$

積 分: $\dfrac{1}{s}$ をかけること

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

表の世界	入力 $u(t)$	$\longrightarrow$	微分方程式	$\longrightarrow$	出力 $x(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	ラプラス変換				逆ラプラス変換
	$\downarrow$				$\uparrow$
裏の世界	$U(s)$	$\longrightarrow$	代数方程式	$\longrightarrow$	$x(s)$

ラプラス変換の性質

時間領域推移

$$\mathcal{L}[\,x(t-\tau)\,] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[\,x(t)\,]$$

s 領域推移

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}x(t)\,] = x(s+a)$$

時間スケーリング

$$\mathcal{L}[\,x(at)\,] = \frac{1}{a}x(\frac{s}{a})$$

ラプラス変換の性質

s 領域での微分

$$\mathcal{L}[\,-tx(t)\,] = \frac{d}{ds}x(s)$$

畳み込み積分

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\,] = \mathcal{L}[\,x(t)\,]\mathcal{L}[\,y(t)\,]$$

ラプラス変換の性質

最終値の定理

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sx(s)$$

初期値の定理

$$x(0+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} x(t) = \lim_{s \to \infty} sx(s)$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 1. $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $x(0) = 3$ の解を求める.

$$x(s) = 3\frac{1}{s+2} \qquad x(t) = 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 2. $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $x(0) = 3$ の解を求める.

$$x(s) = \frac{3s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0)$$

ステップ入力 $\mathcal{L}[\,u(t)\,] = \dfrac{1}{s}$ $\qquad \mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \dfrac{1}{s+a}$

$$\frac{3s+1}{s(s+2)} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 3. $\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)=0$, $\dot{x}(0)=2$, $x(0)=1$ の解を求める.

$$x(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}=4\frac{1}{s+1}-3\frac{1}{s+2}$$

$$x(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,]=sx(s)-x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,]=s^2x(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,]=\frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}=A\frac{1}{s+1}+B\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 4. $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = 1$ **の解を求める.**

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s+1} - \frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,u(t)\,] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 5. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0,\ \dot{x}(0) = 3,\ x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = e^{-t} + 4te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[\,te^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathcal{L}[\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)^2} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{(s+1)^2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 6. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + 3\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = u(t) + 3te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,u(t)\,] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[\,te^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathcal{L}[\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{(s+1)^2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 7. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = -1$, $x(0) = 1$ **の解を求める.**

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$$

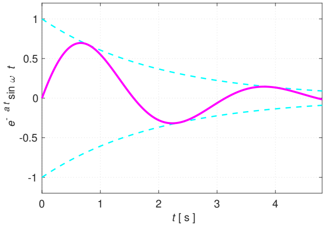
$$x(t) = e^{-t}\cos 3t$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

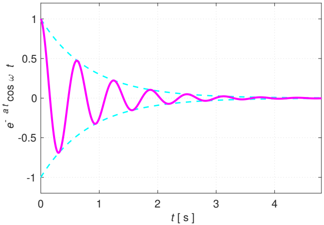
$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\cos\omega t\,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$e^{-at}\sin\omega t \quad e^{-at}\cos\omega t$



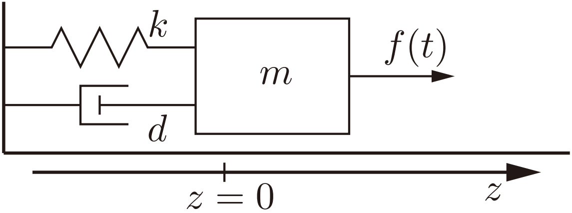
a $e^{-at}\sin\omega t,\ a = 0.5,\ \omega = 2$



b $e^{-at}\cos\omega t,\ a = 1.2,\ \omega = 10$

ラプラス変換と伝達関数

マス–バネ–ダンパ系

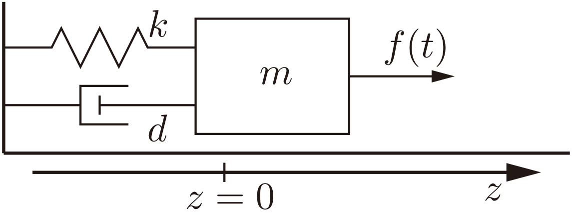


$$m\ddot{z}(t) = f(t) - kz(t) - d\dot{z}(t)$$

- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　出力 (結果)

ラプラス変換と伝達関数

マス–バネ–ダンパ系



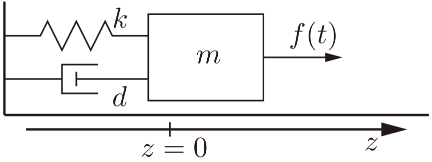
$$m\ddot{z}(t) = f(t) - kz(t) - d\dot{z}(t)$$

- ラプラス変換して:

$$z(s) = \frac{1}{ms^2+ds+k}f(s) + \frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0) + \frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{z}(t)\,] = sz(s) - z(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{z}(t)\,] = s^2 z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

ラプラス変換と伝達関数



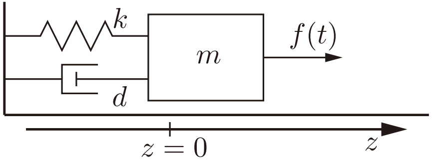
$$z(s) = \frac{1}{ms^2+ds+k} f(s) + \frac{m}{ms^2+ds+k} \dot{z}(0) + \frac{ms+d}{ms^2+ds+k} z(0)$$

入力 f から z への伝達関数	$\dfrac{1}{ms^2+ds+k}$
初期条件 $\dot{z}(0)$ から z への伝達関数	$\dfrac{m}{ms^2+ds+k}$
初期条件 $z(0)$ から z への伝達関数	$\dfrac{ms+d}{ms^2+ds+k}$

分母多項式 ms^2+ds+k 　　**方程式** $ms^2+ds+k=0$

ラプラス変換と伝達関数

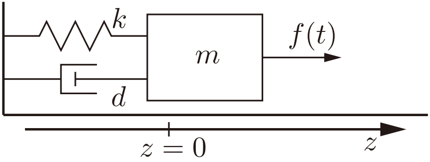
例題 1. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 3$, $k = 2$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

ラプラス変換と伝達関数

例題 1. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=3$, $k=2$ の時の解



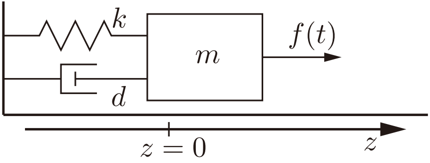
$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

$$z(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=2\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$
$$z(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

- $d=3\neq 0$: 減衰あり (ブレーキが掛かる $\to e^{-t}, e^{-2t}$)
- $ms^2+ds+k=0$ が, 相異なる実数根 $(s=-1,-2)$ をもつ場合

ラプラス変換と伝達関数

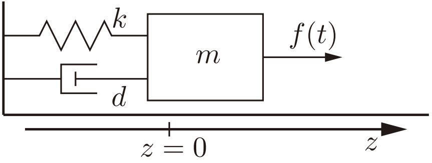
例題 2. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 0$, $k = 4$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

ラプラス変換と伝達関数

例題 2. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $\underline{m=1,\ d=0,\ k=4}$ の時の解



$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

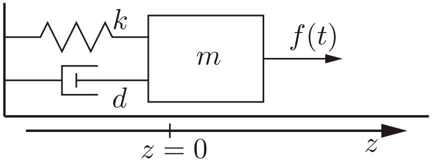
$$z(s)=\frac{s}{s^2+4}=\frac{s}{s^2+2^2}$$

$$z(t)=\cos 2t$$

- $d=0$: 減衰なし (ブレーキが掛からないので, 動き続ける)
- $ms^2+ds+k=0$ が, 虚数 (の共役) 根 ($s=\pm 2j$) をもつ場合

ラプラス変換と伝達関数

例題 3. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 2$, $k = 5$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}$$

ラプラス変換と伝達関数

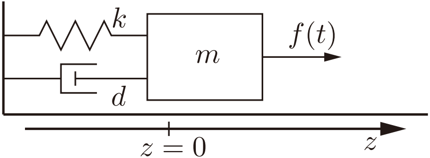
- $z(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+5} = \dfrac{s+2}{(s+1)^2+4}$

$$\mathcal{L}[\, e^{-at} \sin \omega t \,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[\, e^{-at} \cos \omega t \,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$
$$z(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

ラプラス変換と伝達関数

例題 3. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $\underline{m = 1,\ d = 2,\ k = 5}$ の時の解



$$Z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$z(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

- $d = 2 \neq 0$:　減衰あり　(ブレーキが掛かる $\to e^{-t}$)
- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 複素 (共役) 根 ($s = -1 \pm 2j$) をもつ場合

動的なシステムのモデリングと表現
ラプラス変換の復習
動的なシステムの応答
06/10 中間試験

動的なシステムの安定性
動的なシステムの周波数応答
周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/29 期末試験