システム制御工学 I　動的なシステムの解析

動的なシステムのモデリングと表現

ラプラス変換の復習

動的なシステムの応答

06/10 中間試験

動的なシステムの安定性

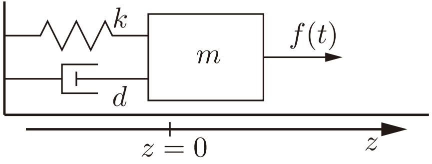
動的なシステムの周波数応答

周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡

07/29 期末試験

動的なシステムの応答

マス–バネ–ダンパ系



伝達関数

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

伝達関数の出力

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

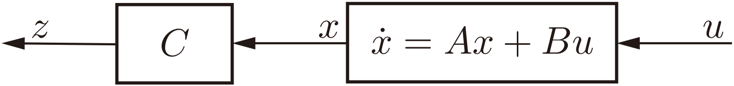
$$z(s) = G(s)u(s)$$

状態方程式の解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$



伝達関数の出力

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

$$z(s) = G(s)u(s)$$

伝達関数の出力

z ?

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$u(s) = 1/s$$

伝達関数の出力

z ?

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$u(s) = 1/s$$

$$z(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}\frac{1}{s} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\frac{1}{s} = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

伝達関数の出力

z ?

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$u(s) = 1/s$$

$$z(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}\frac{1}{s} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\frac{1}{s} = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$z(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+3}$$

$$z(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

伝達関数の出力

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

$$\begin{aligned}
z(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\, G(s) u(s) \,] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\, \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} u(s) \,\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\, \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n_d})} u(s) \,\right]
\end{aligned}$$

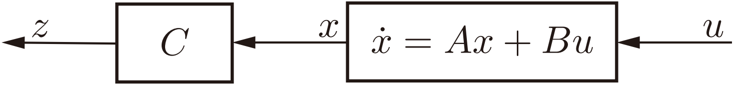
- **伝達関数の極** $\quad p_i \in P(G)$

状態方程式の解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$



簡単な場合
状態方程式の解

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$

解は

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

本当ですか？

$$e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau = \xi(t)$$

とおいて，確認

簡単な場合

状態方程式の解

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}e^{at}e^{-at_0}x_0 + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{at}e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \frac{d}{dt}e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\\
&= ae^{at}e^{-at_0}x_0 + ae^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}e^{-at}bu(t) \\
&= ae^{a(t-t_0)}x_0 + a\int_{t_0}^{t} e^{at}e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{a0}bu(t) \\
&= a\left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right) + bu(t)
\end{aligned}
$$

簡単な場合

状態方程式の解

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \cdots \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \frac{d}{dt}e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\\
&= ae^{at}e^{-at_0}x_0 + ae^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}e^{-at}bu(t) \\
&= ae^{a(t-t_0)}x_0 + a\int_{t_0}^{t} e^{at}e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{a0}bu(t) \\
&= a\left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right) + bu(t) \\
&= a\xi(t) + bu(t)
\end{aligned}
$$

簡単な場合

状態方程式の解

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \cdots \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \frac{d}{dt}e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)e^{-at_0}x_0 + \left(\frac{d}{dt}e^{at}\right)\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \\
&= ae^{at}e^{-at_0}x_0 + ae^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{at}e^{-at}bu(t) \\
&= ae^{a(t-t_0)}x_0 + a\int_{t_0}^{t} e^{at}e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + e^{a0}bu(t) \\
&= a\left(e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right) + bu(t) \\
&= a\xi(t) + bu(t)
\end{aligned}
$$

状態方程式の解

簡単な場合

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

状態方程式の解

簡単な場合

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

一般の場合

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

状態方程式の解

簡単な場合

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

一般の場合

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

行列の指数関数

$$At = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} a_{11}t & a_{12}t \\ a_{21}t & a_{22}t \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} a_{11}t & a_{12}t \\ a_{21}t & a_{22}t \end{bmatrix}} \qquad ?????$$

行列の指数関数

$$At = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} a_{11}t & a_{12}t \\ a_{21}t & a_{22}t \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} a_{11}t & a_{12}t \\ a_{21}t & a_{22}t \end{bmatrix}} \qquad ?????$$

関数

$$g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

を拡張して

$$g(X) \qquad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

を定義したい

行列の指数関数

関数

$$g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

を拡張して

$$g(X) \qquad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

を定義したい

行列の指数関数

関数

$$g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

を拡張して

$$g(X) \qquad X \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

を定義したい

- **Taylor 級数展開**

$$g(x) = g(0) + \frac{1}{1!}\dot{g}(0)x + \frac{1}{2!}\ddot{g}(0)x^2 + \frac{1}{3!}\dddot{g}(0)x^3 + \cdots$$

- $g(X)$ **の定義**

$$g(X) = g(0)I + \frac{1}{1!}\dot{g}(0)X + \frac{1}{2!}\ddot{g}(0)X^2 + \frac{1}{3!}\dddot{g}(0)X^3 + \cdots$$

行列の指数関数

- Taylor 級数展開

$$
\begin{aligned}
e^{at} &= e^0 + \frac{1}{1!}ae^0t + \frac{1}{2!}a^2e^0t^2 + \frac{1}{3!}a^3e^0t^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{1!}at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

- e^{At} の定義

$$
e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots
$$

いいこと

1. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $e^{A(t_2+t_1)} = e^{At_2}e^{At_1}$
3. $e^{A0} = I$

状態方程式の解: つづき

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \xi(t)$$

とおいて, 確認

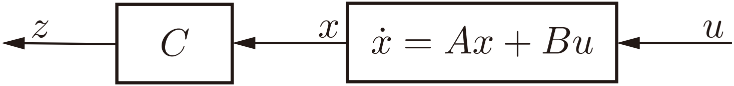
状態方程式の解: つづき

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}e^{At}e^{-At_0}x_0 + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)e^{-At_0}x_0 + \frac{d}{dt}e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)e^{-At_0}x_0 + \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + e^{At}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} \\
&= Ae^{At}e^{-At_0}x_0 + Ae^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + e^{At}e^{-At}Bu(t) \\
&= A\left(e^{At}e^{-At_0}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right) + e^{A(t-t)}Bu(t) \\
&= A\left(e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + IBu(t) \\
&= A\xi(t) + Bu(t)
\end{aligned}
$$

状態方程式の解についてのまとめ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

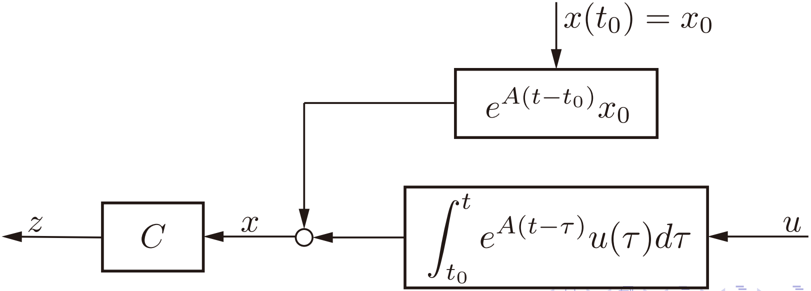
$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$z(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$



状態方程式の解についてのまとめ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$z(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$



状態方程式の解についてのまとめ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$z(t) = Cx(t) \qquad t \geq t_0$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$z(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

零入力応答 $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$

零状態応答 $x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

零入力出力 $z(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$

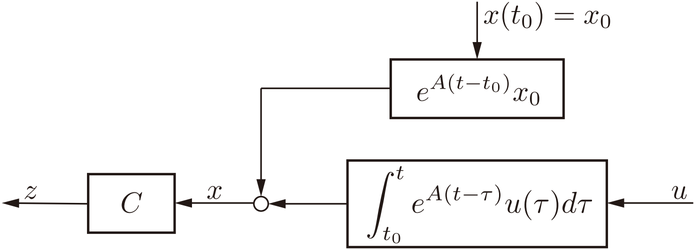
零状態出力 $z(t) = C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

伝達関数の出力と零状態応答

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\, \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n_d})} u(s) \,\right]$$

伝達関数の出力と零状態応答

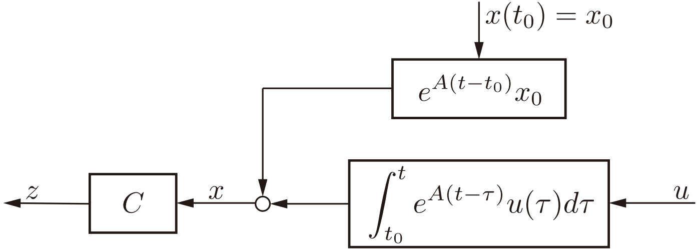
$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \frac{b_{n_n}s^{n_n} + b_{n_n-1}s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n_d})}u(s)\ \right]$$



- 伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ は, $x(t_0) = x_0 = 0$, $t_0 = 0$ と仮定

伝達関数の出力と零状態応答

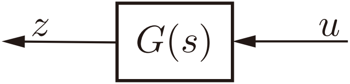
$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ \frac{b_{n_n}s^{n_n} + b_{n_n-1}s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n_d})}u(s)\ \right]$$

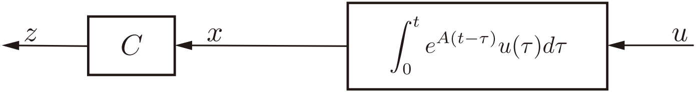


- 伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ は, $x(t_0) = x_0 = 0$, $t_0 = 0$ と仮定

  (伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ の出力) = (零状態出力)

伝達関数の出力と零状態応答





(伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ **の出力)** $=$ **(零状態出力)**

$$
\begin{aligned}
z(t) &= C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= \mathcal{L}^{-1}\Big[\, \frac{b_{n_n}s^{n_n} + b_{n_n-1}s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n_d})} u(s) \,\Big]
\end{aligned}
$$

ラプラス変換を利用した e^{At} の計算

- e^{At} の定義

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

いいこと

1. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $e^{A(t_2+t_1)} = e^{At_2}e^{At_1}$
3. $e^{A0} = I$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, \frac{d}{dt}e^{At} \,] &= \mathcal{L}[\, Ae^{At} \,] \\
s\mathcal{L}[\, e^{At} \,] - e^{A0} &= A\mathcal{L}[\, e^{At} \,] \\
(sI - A)\mathcal{L}[\, e^{At} \,] &= I \\
\mathcal{L}[\, e^{At} \,] &= (sI - A)^{-1}
\end{aligned}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\, (sI - A)^{-1} \,]$$

練 習

ラプラス変換を利用した e^{At} の計算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\,(sI-A)^{-1}\,]$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)}\mathrm{adj}(sI-A) = \frac{1}{(s+1)(s+1)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{(s+a)^n}\,] = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \qquad \mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{s+a}\,] = e^{-at}$$

練習

ラプラス変換を利用した e^{At} の計算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\,(sI - A)^{-1}\,]$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\mathrm{adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)(s+1)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}[\,e^{At}\,]_{11} &= \mathcal{L}^{-1}[\,((sI - A)^{-1})_{11}\,] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[\,\frac{s+2}{(s+1)^2}\,] = \mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{(s+1)^2}\,] + \mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{(s+1)}\,] \\ &= te^{-t} + e^{-t}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{(s+a)^n}\,] = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \qquad \mathcal{L}^{-1}[\,\frac{1}{s+a}\,] = e^{-at}$$

練習

ラプラス変換を利用した e^{At} の計算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \mathrm{adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\, e^{At} \,]_{11} &= \mathcal{L}^{-1}[\, ((sI - A)^{-1})_{11} \,] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[\, \frac{s+2}{(s+1)^2} \,] = \mathcal{L}^{-1}[\, \frac{1}{(s+1)^2} \,] + \mathcal{L}^{-1}[\, \frac{1}{(s+1)} \,] \\ &= te^{-t} + e^{-t} \end{aligned}$$

$$[\, e^{At} \,]_{12} = \cdots \qquad [\, e^{At} \,]_{21} = \cdots \qquad [\, e^{At} \,]_{22} = \cdots$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} te^{-t} + e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & -te^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

システム制御工学 I　動的なシステムの解析

	動的なシステムのモデリングと表現
	ラプラス変換の復習
	動的なシステムの応答
06/10	中間試験
	動的なシステムの安定性
	動的なシステムの周波数応答
	周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/29	期末試験

動的なシステムの応答

$$G(s) = \frac{b_{n_n} s^{n_n} + b_{n_n-1} s^{n_n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^{n_d} + a_{n_d-1} s^{n_d-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad n_n < n_d$$

一次の伝達関数 $(n_d = 1)$

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$

二次の伝達関数 $(n_d = 2)$

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta > 0 \quad \omega_n > 0 \quad K > 0$$

一次の伝達関数のステップ応答

一次の伝達関数 $(n_d = 1)$

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$

一次の伝達関数のステップ応答

一次の伝達関数 ($n_d = 1$)

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$

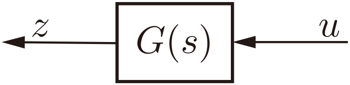
状態空間表現

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}u(t) \\ z(t) &= Kx(t) \end{aligned}$$

$$G(s) = C(s1 - A)^{-1}B = K\frac{1}{s + (1/T)}\frac{1}{T} = \frac{K}{Ts+1}$$

一次の伝達関数のステップ応答

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$

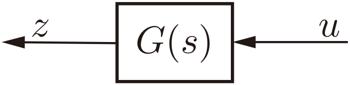


ステップ応答： $z(t)$?

ステップ信号 (入力)： $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

一次の伝達関数のステップ応答

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$



ステップ応答： $z(t)?$ **ステップ信号 (入力)：** $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

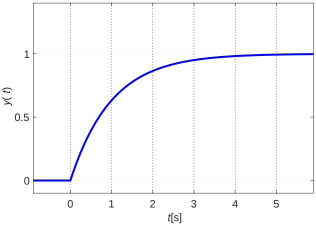
$$z(s) = G(s)u(s) = \frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s} = \frac{K}{s(Ts+1)} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)$$

$$z(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) = K - Ke^{-\frac{1}{T}t}$$

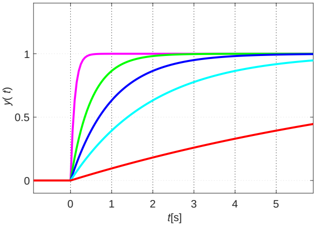
一次の伝達関数のステップ応答

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \qquad T > 0 \quad K > 0$$

$$z(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) = K - Ke^{-\frac{1}{T}t}$$



a $K = 1,\ T = 1$



b $K = 1,\ T = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$

- T: 時定数
- 周波数応答, バンド幅 との関係で復習すること

二次の伝達関数のステップ応答

二次の伝達関数 ($n_d = 2$)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta > 0 \quad \omega_n > 0 \quad K > 0$$

二次の伝達関数のステップ応答

二次の伝達関数 ($n_d = 2$)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta > 0 \quad \omega_n > 0 \quad K > 0$$

マス–バネ–ダンパ系, RLC 回路, 回転運動系は, 二次の伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} = \frac{(1/m)}{s^2 + (d/m)s + (k/m)}$$

$$= \frac{(1/k)(k/m)}{s^2 + (d/m)s + (k/m)}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{d}{m} \qquad K = \frac{1}{k}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{mk}}$$

二次の伝達関数のステップ応答

状態空間表現

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -{\omega_n}^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

二次の伝達関数のステップ応答

状態空間表現

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -{\omega_n}^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ {\omega_n}^2 & s + 2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \qquad \mathrm{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{\det(sI - A)} C\mathrm{adj}(sI - A)B \\ &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \begin{bmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$
\begin{aligned}
z(s) = G(s)u(s) &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} \\
&= K\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t \,] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t \,] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}
$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$\begin{aligned} z(s) = G(s)u(s) &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} \\ &= K(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}) \end{aligned}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \zeta\omega_n)^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 = (s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2$$

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t\,] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$
\begin{aligned}
z(s) = G(s)u(s) &= \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} \\
&= K(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2})
\end{aligned}
$$

$$
s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \zeta\omega_n)^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 = (s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2
$$

$$
z(s) = K(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2})
$$

$$
\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t\,] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}
$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t \,] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t \,] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(s) = K(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2})$$

$$\begin{aligned}
z(s) &= K(\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}) \\
&= K(\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) \\
&= K(\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \\
&\qquad - \zeta\omega_n \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t \,] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t \,] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(s) = K(\frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2})$$

逆ラプラス変換

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t \,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t \,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}\right)$$

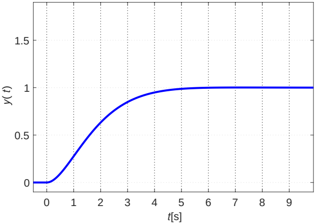
逆ラプラス変換

$$z(t) = K\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

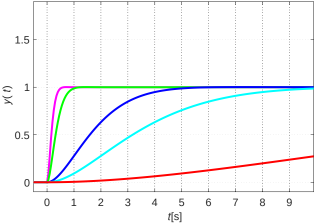
$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\cos\omega t\,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\, e^{-at}\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(t) = K(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$$



a $K = 1,\ \zeta = 0.9,\ \omega_n = 1$

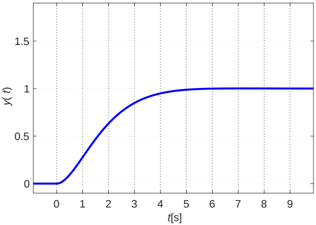


b $K = 1,\ \zeta = 0.9,\ \omega_n = 10, 5, 1, 0.5, 0.1$

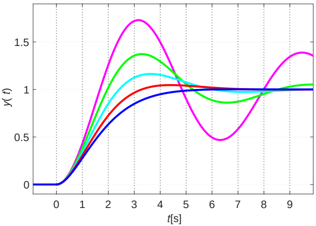
- ω_n: 自然角周波数

二次の伝達関数のステップ応答

$$z(t) = K(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$$



a $K = 1$, $\zeta = 0.9$, $\omega_n = 1$



b $K = 1$, $\zeta = 0.1, 0.3, 0.5$, $0.7, 0.9$, $\omega_n = 1$

- ω_n: 自然角周波数
- ζ: 減衰係数
- 周波数応答, バンド幅, ピークゲイン との関係で復習すること

システム制御工学 I　動的なシステムの解析

	動的なシステムのモデリングと表現
	ラプラス変換の復習
	動的なシステムの応答
06/10	中間試験
	動的なシステムの安定性
	動的なシステムの周波数応答
	周波数応答とボード線図, ベクトル軌跡
07/29	期末試験