線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

平田 研二

目 次

図 目 次

表 目 次

第1章　はじめに

はじめに

第2章　動的なシステムのモデリング

はじめに

第 2 章のポイント

- 静的なシステムを理解しよう.
- 動的なシステムを理解しよう.
- (動的なシステム) = (微分方程式で記述されるシステム)

2.1　静的なシステム

動的なシステムを理解するために, 逆に, 動的ではないシステムを理解することは大切である. 本稿では, 動的ではないシステムのことを静的なシステムと呼ぶ.

例 題 2.1. バネに力を加えた時の伸びを考えよう (Fig. 2.1 参照). バネ定数を k [N/m], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], バネの自然長からの伸びを $z(t)$ [m] でそれぞれあらわす.

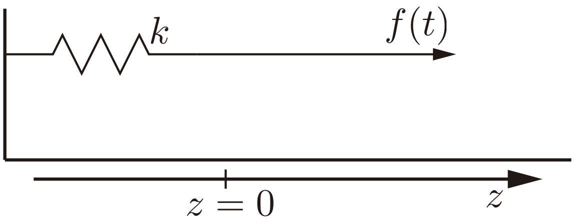

Fig. 2.1: バネ系

バネは伸び $z(t)$ に比例した反力 $kz(t)$ を発生するので $kz(t) = f(t)$ が成立する. 力 f を入力 (原因), 伸び z を出力 (結果) と捉えて, このバネ系の振る舞いを

$$kz(t) = u(t)$$

とあらわすことにしよう. ただしここで $u = f$ とする[1]. このバネ系では, あ

[1]制御工学やシステム理論と呼ばれる分野では, システムへの入力を記号 u や w で, 出力を記号 y や z であらわすことが多いので, この習慣にあわせて単に $u = f$ と置いているだけです.

る時刻 t_1 での出力の値 $z(t_1)$ が, 同じ時刻 t_1 での入力の値 $u(t_1)$ のみで決まってしまうことがわかる. □

例題 2.1 のバネ系では, ある時刻 t_1 での出力の値 $z(t_1)$ が, 同じ時刻 t_1 での入力の値 $u(t_1)$ のみで決定される. 実はこのように, 任意の時刻 t_1 での出力 $z(t_1)$ が, 同じ時刻 t_1 での入力 $u(t_1)$ のみによって決定されてしまうことが, 静的なシステムの特徴になっている. つぎに確認するように, 動的なシステムでは, ある時刻 t_1 での出力の値 $z(t_1)$ に, 初期時刻 t_0 から現在の時刻 t_1 までに渡るすべての $u(t)$ が影響を与える.

2.2　動的なシステム

つぎの例を考えよう.

例 題 2.2. 質点に力を加えた時の振る舞いを考えよう (Fig. 2.2 参照). 質点の質量を m [kg], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], 質点の位置を $z(t)$ [m] でそれぞれあらわす. また質点は, 初期時刻 $t = t_0$ で初期位置 $z(t_0) = z_0$ [m], 初期速度 $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s] をもっていたとする.

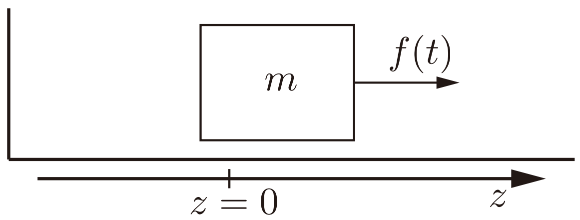

Fig. 2.2: マス系

運動方程式は, (質量) × (加速度) = (外から加わる力) より

$$m\ddot{z}(t) = f(t)$$

で与えられる. $t = t_0$ での初期条件もふまえて, このマス系の振る舞いは微分方程式

$$m\ddot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

で記述される. ただしここで $u = f$ とする. □

例題 2.1 のバネ系とは異なり, 例題 2.2 のマス系では, その振る舞いが微分方程式で記述される. 本稿では,

(動的なシステム) = (微分方程式で記述されるシステム)

と定義することにする[2].

[2]なので正確には, 静的なシステムの定義は, 微分方程式では記述されないシステム, ということになりますね.

動的なシステムの特徴を把握するため, 例題 2.2 のマス系よりさらに単純な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0 \tag{2.1}$$

を考えよう. ここで u は外部から与えられる入力である.

実はシステムの出力 z, つまり微分方程式 (2.1) をみたす解 $z(t)$ は,

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \tag{2.2}$$

で与えられる. まず, (2.2) の右辺が実際に (2.1) の解を与えることを確認しよう. そこで

$$\zeta(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

とおく.

$t = t_0$ を考えると,

$$\zeta(t_0) = z_0 + \int_{t_0}^{t_0} u(\tau) d\tau = z_0 + 0 = z_0$$

なので, 確かに (2.2) は (2.1) の初期条件 $z(t_0) = z_0$ をみたすことが確認できた.

つぎに $t > t_0$ として, $\zeta(t)$ の両辺を微分してみると

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \frac{d}{dt}\left(z_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt} z_0 + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \\ &= 0 + u(t) = u(t)\end{aligned}$$

なので[3], (2.2) が (2.1) 微分方程式を満たすことも確認できた. 確かに (2.2) は動的システム (2.1) の出力を与えている.

(2.1) の解 (2.2) を見るとわかるように, ある時刻 t_1 での出力 $z(t_1)$ を決定するには, 入力 u の初期時刻 $t = t_0$ から $t = t_1$ に渡るすべての値が必要であり, また初期条件 $z(t_0) = z_0$ も必要である.

この簡単な例でも確認できたように, 静的なシステムとは異なり, 動的なシステムでは, 時刻 t_1 での出力 $z(t_1)$ を決定するには, 同じ時刻 t_1 での入力の値 $u(t_1)$ のみでは情報が不足しており, 初期条件に加え, 初期時刻 $t = t_0$ から $t = t_1$ に渡るすべての入力の値 $u(t)$ が必要になる. $t_0 < t_2 < t_1$ と考えると, 過去の時点 t_2 に受けた影響 $u(t_2)$ にも現在の出力 $z(t_1)$ が依存して決定されるのが, 動的なシステムの特徴となっている[4].

---

[3]連続関数 f に対する $f(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$ は, 微分積分学の基本定理などの名称で知られる結果です. 厳密な議論については, 解析学の教科書を参照してください. 厳密さには欠けますが, F を f の原始関数として $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau = \dfrac{d}{dt}\left([\,F(\tau)\,]_{t_0}^{t}\right) = \dfrac{d}{dt}(F(t) - F(t_0)) = \dfrac{d}{dt}F(t) - \dfrac{d}{dt}F(t_0) = f(t) - 0 = f(t)$ のように理解しておいても良いかも知れません.

[4]まるで人生のようですね.

2.3　動的なシステムのモデリング

動的なシステムを表現する具体的な微分方程式を導出しよう．最初に考えるマス - バネ - ダンパ系は, 機械系 (メカニカルシステム) の代表的な例である．また RLC 回路は, 電気系の代表的な例となっている．同じ機械系でも回転運動を考える場合, あるいは電気系のシステムと機械系のシステムが融合したシステムなど, 制御工学やシステム工学と呼ばれる分野では, 様々なシステムを考察の対象にする．2 つの簡単な例をよく把握して, 複雑なシステムのモデリングのための第一歩にして欲しい.

2.3.1　マス - バネ - ダンパ系

Fig. 2.3 のマス - バネ - ダンパ系を考えよう．質点の質量を m [kg], バネ定数を k [N/m], ダンパ定数を d [Ns/m], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], 質点の位置を $z(t)$ [m] でそれぞれあらわす．ただしバネの自然長は, 質点の位置の原点 $z = 0$ と一致しているとする．また質点は, 初期時刻 $t = t_0$ で $z(t_0) = z_0$ [m] の初期位置と $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s] の初期速度をもっていたとする.

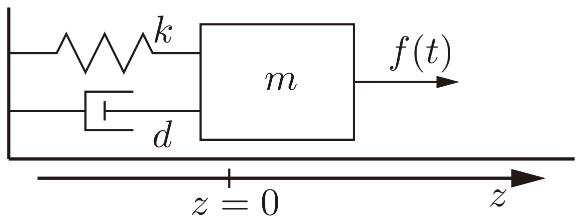

Fig. 2.3: マス - バネ - ダンパ系

このマス - バネ - ダンパ系の運動方程式を考えよう．バネは伸び $z(t)$ に比例した反力 $kz(t)$ を発生し, ダンパは速度 $\dot{z}(t)$ に比例した反力 $d\dot{z}(t)$ を発生する．運動方程式は, (質量) × (加速度) = (外から加わる力) より

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

で与えられる．$t = t_0$ での初期条件もふまえて, マス - バネ - ダンパ系の振る舞いは微分方程式

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

で記述される．ただしここで $u = f$ とする. □

2.3.2　RLC 回路

Fig. 2.4 の RLC 回路を考えよう．抵抗の抵抗値を R [Ω], コイルのインダクタンスを L [H], コンデンサの静電容量を C [F], 加える電圧を $v(t)$ [V] でそれぞれあらわす．電圧 v を入力, コンデンサに蓄えられる電荷 q [C] を

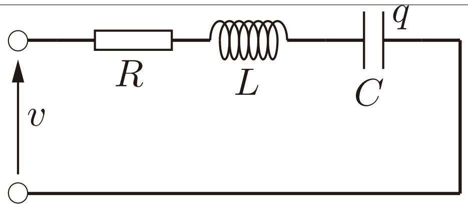

Fig. 2.4: RLC 回路

出力と考え, この RLC 回路をモデリングしよう. ただし初期時刻 t_0 では, $q(t_0) = q_0$ [q], $\dot{q}(t_0) = 0$ [A] であったとする.

回路を流れる電流を i [A] とする. コイルでの電圧降下は $L\dot{i}(t)$, 抵抗での電圧降下は $Ri(t)$, コンデンサでの電圧降下は $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ で与えられる. これより

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

がえられる. また $q(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ であるので, $\dot{q}(t) = i(t)$, $\ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$ と併せて

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

と表現できる. $t = t_0$ での初期条件もふまえて, RLC 回路の振る舞いは微分方程式

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \qquad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

で記述される. ただしここで $u = v$ とする.

第3章　ラプラス変換

はじめに

第 3 章のポイント

- ラプラス変換の定義を理解しよう.
- 基本的な関数のラプラス変換を計算しよう.
- 微分と積分のラプラス変換による表現を理解しよう.
- ラプラス変換により, 微分方程式の解を求めよう.
- ラプラス変換表を覚える必要はありません.

3.1　ラプラス変換

定 義 3.1 (ラプラス変換)**.** 関数 $x(t)$, $t \geq 0$ (ただし $t < 0$ の時は $x(t) = 0$ とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

ただしここで $s = \sigma + j\omega$ は複素数である. □

本来なら関数 $x(t)$ のラプラス変換を表す記号として, $X(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$ や $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ などのように, x とは異なる記号 X や $\tilde{x}$ などを使わなければいけない. 記号が煩雑になるのと, 関数 $x(t)$ を考えているのか, あるいはそのラプラス変換 $x(s)$ を考えているのかは, 前後の文脈から明らかと思われるので, 本稿では, あえて $x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$ のように表記する.

より正確には, 本稿では

$$x(s) = \mathcal{L}_-[\,x(t)\,] = \int_{0-}^\infty x(t)e^{-st}dt = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{-\epsilon}^\infty x(t)e^{-st}dt$$

をラプラス変換の定義とする. つまり積分区間は $t = 0$ を含んでいると考える.

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない

– ラプラス変換の収束領域: $\mathrm{Re}[\,s\,] > \alpha$

- 多くの関数 (指数オーダーの関数) がラプラス変換可能
- ラプラス変換の利用 (微分方程式を解く際に) 収束領域を陽に考慮する必要はない
  – ラプラス変換には, 深い理論があります. ぜひ, 色々な教科書末に目をとおしてください.

3.2 基本的な関数のラプラス変換

具体的な関数を取り上げ, 関数のラプラス変換を実際に計算してみよう.

例 題 3.1. ステップ関数: $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\,u(t)\,] &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^\infty \\ &= \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-st}) - (-\frac{1}{s})e^{-s0} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\,u(t)\,] = \frac{1}{s}$$

□

例 題 3.2. 指数関数: $e^{-at} \quad a > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\,e^{-at}\,] &= \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \left[-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty \\ &= \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}) - (-\frac{1}{s+a})e^{-(s+a)0} = 0 + \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

□

三角関数 $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ のラプラス変換は, オイラーの公式 $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ に注意し

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

を利用すれば, 簡単に求めることができる.

例 題 3.3. 正弦関数: $\sin\omega t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\sin\omega t\,] &= \mathcal{L}[\,\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\,] = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}[\,e^{j\omega t}\,]-\mathcal{L}[\,e^{-j\omega t}\,]) \\ &= \frac{1}{2j}(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}) = \frac{1}{2j}\frac{s+j\omega-(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \\ &= \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\,\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

□

例 題 3.4. 余弦関数: $\cos\omega t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\cos\omega t\,] &= \mathcal{L}[\,\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\,] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\,e^{j\omega t}\,]+\mathcal{L}[\,e^{-j\omega t}\,]) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}) = \frac{1}{2}\frac{s+j\omega+s-j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\,\cos\omega t\,] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

□

つぎのランプ関数 $r(t) = t$ のラプラス変換は, 部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

を使えば, 簡単に求めることができる.

例 題 3.5. ランプ関数: $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,r(t)\,] &= \int_0^\infty r(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt \\ &= \left[t(-\frac{1}{s}e^{-st})\right]_0^\infty - \int_0^\infty(-\frac{1}{s}e^{-st})dt \\ &= \lim_{t\to\infty} t(-\frac{1}{s}e^{-st}) - 0(-\frac{1}{s}e^{-s0}) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}dt\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-st}) - (-\frac{1}{s}e^{-s0})\right) = \frac{1}{s}(0+\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\,r(t)\,] = \frac{1}{s^2}$$

□

例 題 3.6. インパルス関数: $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$$\text{インパルス関数 } \delta(t) \text{ の性質: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\mathcal{L}[\ \delta(t)\ ] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\ \delta(t)\ ] = 1$$

□

3.3　ラプラス変換の性質

以下では, 表記を簡単にするため, $x(t)$ の導関数を $\dot{x}(t)$ とも表記する. つまり, $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ や $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ とする.

例 題 3.7 (線型性)**.**

$$\mathcal{L}[\ ax(t) + by(t)\ ] = ax(s) + by(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\ ax(t) + by(t)\ ] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t) + by(t))e^{-st}dt \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt \\
&= a\mathcal{L}[\ x(t)\ ] + b\mathcal{L}[\ y(t)\ ]
\end{aligned}$$

□

関数 $x(t)$ の微分 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ のラプラス変換は, 部分積分の公式を利用し, 簡単に求めることができる.

例 題 3.8 (時間微分)**.**

$$\mathcal{L}[\ \frac{dx(t)}{dt}\ ] = sx(s) - x(0)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\ x(t)\ ] &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dtx \\
&= \left[x(t)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}x(t)e^{-st}\right) + \frac{1}{s}x(0)e^{-s0} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \\
&= 0 + \frac{1}{s}x(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}[\ \frac{dx(t)}{dt}\ ]
\end{aligned}$$

$$s\mathcal{L}[\ x(t)\ ] - x(0) = \mathcal{L}[\ \frac{dx(t)}{dt}\ ]$$

□

ここで $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ とおくと, $\dfrac{dy(t)}{dt}$ のラプラス変換, つまり $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}\,] = \mathcal{L}[\,\frac{dy(t)}{dt}\,] &= sy(s) - y(0) = s\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] - \dot{x}(0)\\ &= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0) = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

と求めることができる. これは $z(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ とおいて, というように繰り返し考えることができるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] &= sx(s) - x(0)\\ \mathcal{L}[\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}\,] &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\\ \mathcal{L}[\,\frac{d^3x(t)}{dt^3}\,] &= s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)\\ \mathcal{L}[\,\frac{d^4x(t)}{dt^4}\,] &= s^4x(s) - s^3x(0) - s^2\dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - \dddot{x}(0)\\ &\vdots\\ \mathcal{L}[\,\frac{d^nx(t)}{dt^n}\,] &= s^nx(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{n-2}(0) - x^{n-1}(0)\end{aligned}$$

がわかる.

関数 $x(t)$ の積分 $\displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau$ のラプラス変換も簡単に求めることができる.

例 題 3.9 (時間積分)**.**

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

$y(t)$ を

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

とおく. ここで

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \qquad y(0) = \int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

に注意して $\dot{y}(t) = x(t)$ のラプラス変換を考える.

$$\begin{aligned}x(s) &= \mathcal{L}[\,\frac{dy(t)}{dt}\,] = sy(s) - y(0) = s\mathcal{L}[\,y(t)\,] - 0 = s\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,]\\ \frac{1}{s}x(s) &= \mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,]\end{aligned}$$

□

さらに

$$\int_0^t y(\tau)d\tau$$

のラプラス変換, つまり

$$\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1 d\tau$$

のラプラス変換を考えると

$$\mathcal{L}[\int_0^t y(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}y(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1\,] = \frac{1}{s}\frac{1}{s}x(s) = \frac{1}{s^2}x(s)$$

がえられる. これも繰り返し考えることができるので

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau\,] &= \frac{1}{s}x(s)\\
\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1 d\tau\,] &= \frac{1}{s^2}x(s)\\
\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 d\tau\,] &= \frac{1}{s^3}x(s)\\
&\vdots\\
\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-3}} \int_0^{\tau_{n-2}} x(\tau_{n-2})d\tau_{n-2}d\tau_{n-3}\cdots d\tau_2 d\tau_1 d\tau\,] &= \frac{1}{s^n}x(s)
\end{aligned}$$

がわかる.

例 題 3.10 (畳み込み積分)**.**

$$\mathcal{L}[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\,] = \mathcal{L}[\,x(t)\,]\mathcal{L}[\,y(t)\,]$$

□

例 題 3.11 (最終値の定理)**.**

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sx(s)$$

$\dfrac{dx(t)}{dt}$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] = sx(s) - x(0)$$

に対して, 両辺の $s \to 0$ の極限

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] = \lim_{s\to 0}(sx(s) - x(0))$$

を考える. 左辺の極限

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[\,\frac{dx(t)}{dt}\,] &= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}\lim_{s\to 0}e^{-st}dt\\
&= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}dt = [x(t)]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0)
\end{aligned}$$

と右辺の極限

$$\lim_{s\to 0}(sx(s) - x(0)) = \lim_{s\to 0} sx(s) - x(0)$$

より

$$\lim_{t\to\infty} x(t) - x(0) = \lim_{s\to 0} sx(s) - x(0)$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sx(s)$$

が確認できる. □

Table 3.1: 基本的な関数のラプラス変換表

関数 $x(t)$	ラプラス変換 $x(s)$
$u(t) = 1$ (ステップ関数)	$\dfrac{1}{s}$
$r(t) = t$ (ランプ関数)	$\dfrac{1}{s^2}$
$\dfrac{1}{n!}t^n$	$\dfrac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$ (インパルス関数)	1
$ax(t) + by(y)$	$ax(s) + by(s)$
$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$sx(s) - x(0)$
$\displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}x(s)$

matlab note 3.1 (`laplace`). コマンド `laplace` により, ラプラス変換の計算ができる. 例えば, $\sin 3t$ のラプラス変換は

```
1: syms t; syms s;
2: laplace( sin( 3 * t ), t, s )
```

で, $\dot{x}(t)$ のラプラス変換は

```
1: syms t; syms s; syms x( t );
2: laplace( diff( x( t ) ) )
```

で計算できる. □

3.4 ラプラス変換と微分方程式

例 題 3.12. $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $x(0) = 3$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\,\dot{x}(t) + 2x(t)\,] &= \mathcal{L}[\,0\,] \\ sx(s) - x(0) + 2x(s) &= 0 \\ (s+2)x(s) &= 3 \\ x(s) &= 3\frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = 3e^{-2t}$$

□

例 題 3.13. $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $x(0) = 3$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\,\dot{x}(t) + 2x(t)\,] &= \mathcal{L}[\,u(t)\,] \\ sx(s) - x(0) + 2x(s) &= 1/s \\ (s+2)x(s) &= 3 + 1/s \\ x(s) &= \frac{3s+1}{s(s+2)} \end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{3s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

□

例 題 3.14. $\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)=0$, $\dot{x}(0)=2$, $x(0)=1$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)\,]&=\mathcal{L}[\,0\,]\\ s^2x(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+3(sx(s)-x(0))+2x(s)&=0\\ (s^2+3s+2)x(s)&=s+2+3\\ x(s)&=\frac{s+5}{s^2+3s+2}\\ &=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s+1}+B\frac{1}{s+2}$$

との係数比較により,

$$x(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}=4\frac{1}{s+1}-3\frac{1}{s+2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$$

□

例 題 3.15. $\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)=u(t)$, $\dot{x}(0)=2$, $x(0)=1$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t)\,]&=\mathcal{L}[\,u(t)\,]\\ s^2x(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+3(sx(s)-x(0))+2x(s)&=1/s\\ (s^2+3s+2)x(s)&=s+2+3+1/s\\ x(s)&=\frac{s^2+5s+1}{s(s^2+3s+2)}\\ &=\frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s}+B\frac{1}{s+1}+C\frac{1}{s+2}$$

との係数比較により,

$$x(s)=\frac{s^2+5s+1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+3\frac{1}{s+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=\frac{1}{2}u(t)+3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}$$

□

例 題 3.16. $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=0$, $\dot{x}(0)=3$, $x(0)=1$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)\,] &= \mathcal{L}[\,0\,]\\ s^2-sx(0)-\dot{x}(0)+2(sx(s)-x(0))+x(s) &= 0\\ (s^2+2s+1)x(s) &= s+3+2\\ x(s) &= \frac{s+5}{s^2+2s+1}\\ &= \frac{s+5}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s+1}+B\frac{1}{(s+1)^2}$$

との係数比較により,

$$x(s)=\frac{s+5}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+4\frac{1}{(s+1)^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=e^{-t}+4te^{-t}$$

□

例 題 3.17. $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=u(t)$, $\dot{x}(0)=3$, $x(0)=1$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)\,] &= \mathcal{L}[\,u(t)\,]\\ s^2-sx(0)-\dot{x}(0)+2(sx(s)-x(0))+x(s) &= 1/s\\ (s^2+2s+1)x(s) &= s+3+2+1/s\\ x(s) &= \frac{s^2+5s+1}{s(s^2+2s+1)}\\ &= \frac{s^2+5s+1}{s(s+1)^2}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s}+B\frac{1}{s+1}+C\frac{1}{(s+1)^2}$$

との係数比較により,

$$x(s)=\frac{s^2+5s+1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}+3\frac{1}{(s+1)^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=u(t)+3te^{-t}$$

□

例 題 3.18. $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+10x(t)=0$, $\dot{x}(0)=-1$, $x(0)=1$ の解を求めよう.
両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+10x(t)\,] &= \mathcal{L}[\,0\,]\\ s^2-sx(0)-\dot{x}(0)+2(sx(s)-x(0))+10x(s) &= 0\\ (s^2+2s+10)x(s) &= s-1+2\\ x(s) &= \frac{s+1}{s^2+2s+10}\\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=e^{-t}\cos 3t$$

□

matlab note 3.2 (ilaplace)**.** コマンド ilaplace により, 逆ラプラス変換の計算ができる. 例えば, 例題 3.16 の逆ラプラス変換は

```
1: syms t; syms s;
2: x( s ) = ( s + 5 ) / ( s^2 + s * 2 + 1 )
3: x( t ) = ilaplace( x( s ), s, t )
```

で計算できる. □

2.3.1 節のマス - バネ - ダンパ系を考えよう. なおここでは, 初期時刻を $t_0=0$ としよう.
運動方程式 $m\ddot{z}(t)+d\dot{z}(t)+kz(t)=f(t)$ の両辺をラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,m\ddot{z}(t)+d\dot{z}(t)+kz(t)\,] &= \mathcal{L}[\,f(t)\,]\\ m(s^2z(s)-sz(0)-\dot{z}(0))+d(sz(s)-z(0))+kz(s) &= f(s)\\ (ms^2+ds+k)z(s) &= f(s)+msz(0)+m\dot{z}(0)+dz(0)\end{aligned}$$

がえられる. またこれより

$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)$$

がえられる. ここで $1/(ms^2+ds+k)$ は, 入力 f が出力 z に与える影響を, 同様に $(ms+d)/(ms^2+ds+k)$ は, 初期条件 $z(0)$ が出力 z に与える影響をあらわしている. これらをそれぞれ

外力 f から z への伝達関数: $\dfrac{1}{ms^2+ds+k}$

初期速度 $\dot{z}(0)$ から z への伝達関数: $\dfrac{m}{ms^2+ds+k}$

初期位置 $z(0)$ から z への伝達関数: $\dfrac{ms+d}{ms^2+ds+k}$

と呼ぶ. また伝達関数の分母は, 共通に ms^2+ds+k になっているが, これを

$$\text{伝達関数の分母多項式:} \qquad ms^2+ds+k$$

と呼ぶ.

例 題 3.19. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=3$, $k=2$ の時の解:

$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$z(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=2\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

- $ms^2+ds+k=0$ が, 相異なる実数根 $(s=-1,-2)$ をもつ場合

□

例 題 3.20. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=0$, $k=4$ の時の解:

$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$z(s)=\frac{s}{s^2+4}=\frac{s}{s+2^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=\cos 2t$$

- $ms^2+ds+k=0$ が, 虚数 (の共役) 根 $(s=\pm 2j)$ をもつ場合

□

例 題 3.21. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=2$, $k=5$ の時の解:

$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$\begin{aligned}z(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+5}&=\frac{s+2}{(s+1)^2+4}\\&=\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t)=e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

- $ms^2+ds+k=0$ が, 複素 (共役) 根 $(s=-1\pm 2j)$ をもつ場合

□

第4章　レポート課題

レポート課題 1. Fig. 4.1 のマス - バネ系を考える. 質点の質量を m [kg], バネ定数を k [N/m], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], 質点の位置を $z(t)$ [m] でそれぞれあらわす. ただしバネの自然長は, 質点の位置の原点 $z=0$ と一致しているとする. また質点は, 初期時刻 $t_0=0$ で $z(0)=z_0$ [m] の初期位置と $\dot{z}(0)=v_0$ [m/s] の初期速度をもっていたとする. 入力を f, 出力を z と考える.

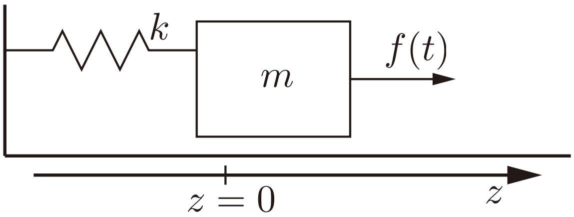

Fig. 4.1: マス - バネ系

1. このマス - バネ系の運動方程式を求めなさい.
2. $m=3$, $k=12$, $f(t)=0$, $z_0=1$, $v_0=0$ のときの解 $z(t)$ を求めなさい (参考: 答え $z(t)=\cos 2t$).

レポート課題 2. Fig. 4.2 のマス - ダンパ系を考える. 質点の質量を m [kg], ダンパ定数を d [Ns/m], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], 質点の位置を $z(t)$ [m], 質点の速度を $v(t)=\dot{z}(t)$ でそれぞれあらわす. また質点は, 初期時刻 $t_0=0$ で $\dot{z}(0)=v(0)=v_0$ [m/s] の初期速度をもっていたとする. 入力を f, 出力を $v=\dot{z}$ と考える.

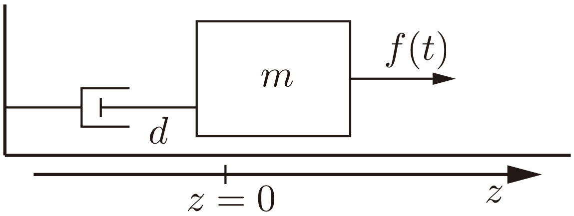

Fig. 4.2: マス - ダンパ系

1. このマス - ダンパ系の運動方程式を求めなさい.
2. $m=1$, $d=2$, $f(t)=u(t)$(= ステップ関数), $v_0=0$ のときの解 $v(t)$ を求めなさい (参考: 答え $v(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}$).

レポート課題 3. Fig. 4.3 の RL 回路を考える．コイルのインダクタンスを L [H], 抵抗の抵抗値を R [Ω], 加える電圧を $v(t)$ [V], 流れる電流を i [A] でそれぞれあらわす．また初期時刻 $t_0 = 0$ では, $i(0) = 0$ であったとする．入力を v, 出力を i と考える．

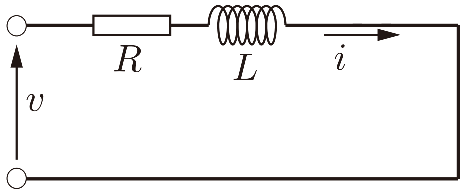

Fig. 4.3: RL 回路

1. この RL 回路の運動方程式を求めなさい．
2. $R = 1$, $L = 2$, $v(t) = u(t)$(= ステップ関数) のときの解 $i(t)$ を求めなさい (参考: 答え $i(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$).

レポート課題 4. Fig. 4.4 の RC 回路を考える．抵抗の抵抗値を R [Ω], コンデンサの静電容量を C [F], 加える電圧を $v(t)$ [V], コンデンサに蓄えられる電荷を $q(t)$ [C] でそれぞれあらわす．また初期時刻 $t_0 = 0$ では, $q(0) = q_0$ であったとする．入力を v, 出力を q と考える．

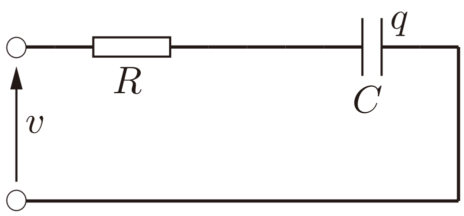

Fig. 4.4: RC 回路

1. この RC 回路の運動方程式を求めなさい．
2. $R = 1$, $C = \dfrac{1}{3}$, $v(t) = 0$, $q(0) = 10$ のときの解 $q(t)$ を求めなさい (参考: 答え $q(t) = 10e^{-3t}$).

レポート課題 5. Fig. 4.5 のマス - ダンパ系を考える．質点の質量を m [kg], それぞれのダンパ定数を c_1 [Ns/m], c_2 [Ns/m], 外部から加わる力を $u(t)$ [N], ダンパを介して結合された質点の位置を $y(t)$ [m] でそれぞれあらわす．また質点は, 初期時刻 $t_0 = 0$ で $y(0) = y_0$ [m] の初期位置と $\dot{y}(0) = v_0$ [m/s] の初期速度をもっていたとする．なお, 物体が壁に接触することはないと仮定する．入力を u, 出力を y と考える．

1. マス - ダンパ系の運動方程式を求めなさい．
2. $u(t) = 0$, $y_0 = 0$ のときの解 $y(t)$ を求めなさい (参考: 答え $y(t) = \dfrac{mv_0}{c_1 + c_2}(1 - e^{-\frac{c_1+c_2}{m}t})$).

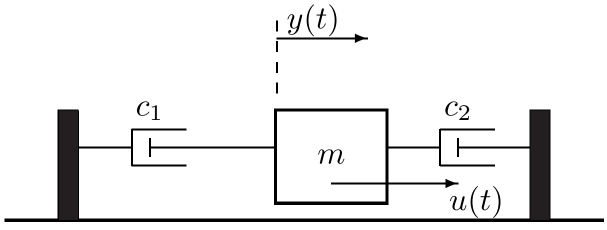

Fig. 4.5: マス – ダンパ系

線形常微分方程式とラプラス変換 (自然科学への扉 C)　レポート課題

学籍番号 ________________________　氏 名 ________________________

レポート課題 1. から 5. の解答を A4 用紙に記述し, この用紙を表紙にしてホチキス止めし, 提出してください.

提出期限:　**2025 年 2 月 10 日 17:00**
提出場所:　**G11 棟 3F 7306 室, レポート提出ボックス**