線形常微分方程式とラプラス変換

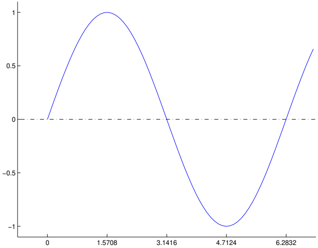
自然科学への扉 C

線形常微分方程式とラプラス変換

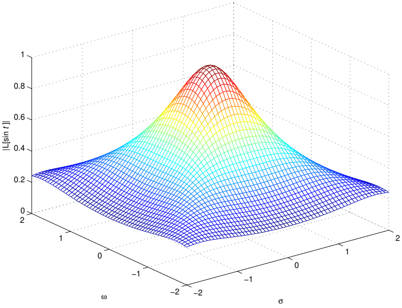
自然科学への扉 C

12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
01 / 14 ラプラス変換の性質
01 / 21 ラプラス変換と微分方程式
01 / 28 ラプラス変換と微分方程式

なぜラプラス変換を考えるのか



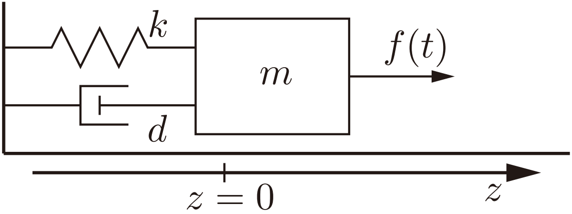
$$\sin t$$



$$|\mathcal{L}[\,\sin t\,]|$$

なぜラプラス変換を考えるのか

マス–バネ–ダンパ系



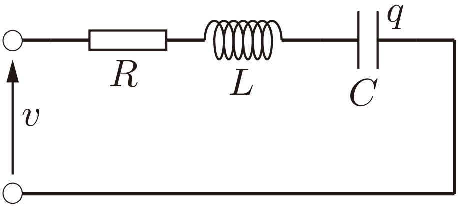
$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]　　**入力 (原因)**
- 質点の位置: $z(t)$ [m]　　**出力 (結果)**

記 法: $x(t)$　　$\dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$　　$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$　　$\dfrac{d^nx(t)}{dt^n} = x^{(n)}(t)$

なぜラプラス変換を考えるのか

RLC 回路



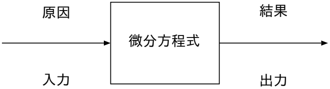
$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

- 加える電圧: $v(t)$ [V]　　入力
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C]　　出力

なぜラプラス変換を考えるのか

さまざまな問題は, 微分方程式で記述される

- 機械, 電気, 材料, 熱, 流体, 生物, 通信, 金融 などなど



科学者は, 微分方程式を解きたい

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 **階定数係数線形常微分方程式**: $\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0 (t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式:　$\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t)$$

表の世界	入力 $u(t)$	$\longrightarrow$	微分方程式	$\longrightarrow$	出力 $x(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	ラプラス変換				逆ラプラス変換
	$\downarrow$				$\uparrow$
裏の世界	$u(s)$	$\longrightarrow$	代数方程式	$\longrightarrow$	$x(s)$

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング

01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換

01 / 14 ラプラス変換の性質

01 / 21 ラプラス変換と微分方程式

01 / 28 ラプラス変換と微分方程式