

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

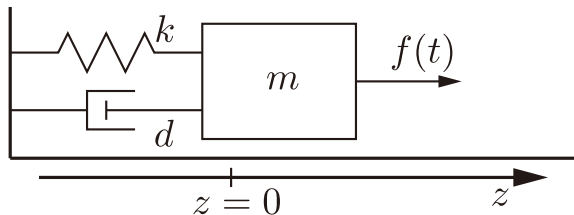
線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

- 12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- 01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- 01 / 14 ラプラス変換の性質
- 01 / 21 ラプラス変換と微分方程式
- 01 / 28 ラプラス変換と微分方程式

動的なシステムのモデリング

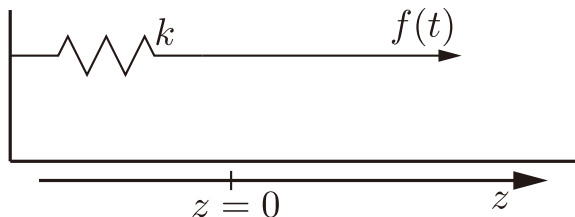
マス-バネ-ダンパ系



$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

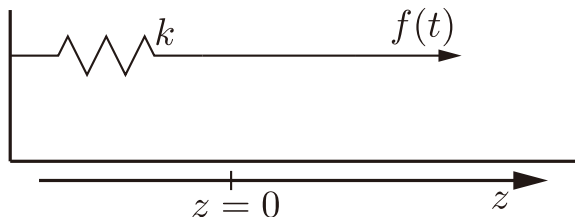
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

静的なシステム



- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

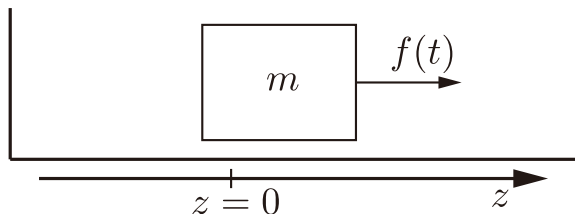
静的なシステム



- バネ定数: k [N/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- バネの自然長からの伸び: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

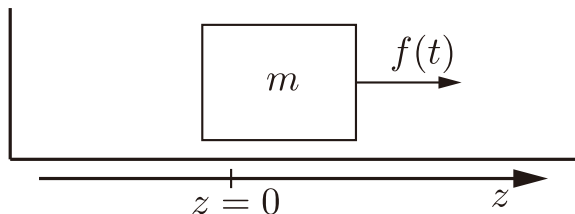
$$kz(t) = f(t)$$

動的なシステムのモデリング



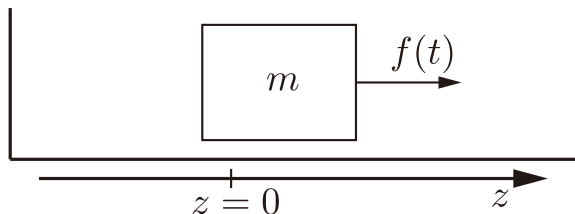
- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

動的なシステムのモデリング



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]
- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)

動的なシステムのモデリング

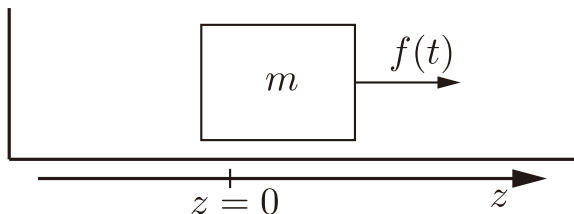


- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)

$$m\ddot{z}(t) = f(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

動的なシステムのモデリング



- 質点の質量: m [kg]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)

$$m\ddot{z}(t) = f(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

(動的なシステム) = (微分方程式で記述されるシステム)

動的なシステムのモデリング

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

動的なシステムのモデリング

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

動的なシステムのモデリング

もっと簡単な動的システム

$$\dot{z}(t) = u(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0$$

微分方程式をみたす解 $z(t)$:

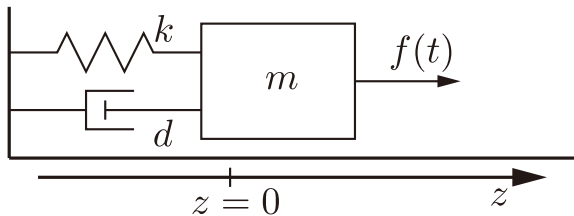
$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

本当に解か, 確認

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \frac{d}{dt} \left(z_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} z_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \\ &= 0 + u(t) = u(t)\end{aligned}$$

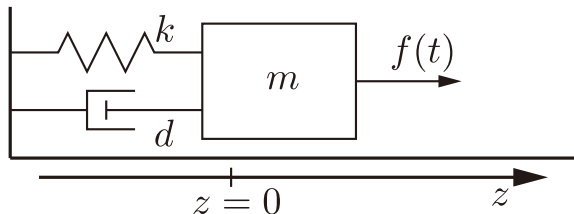
動的なシステムのモデリング

マス-バネ-ダンパ系



動的なシステムのモデリング

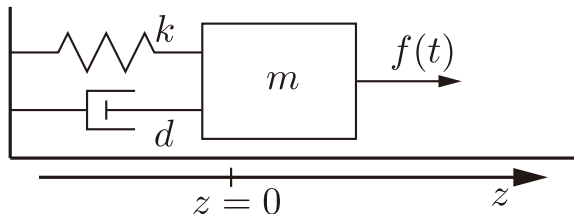
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

動的なシステムのモデリング

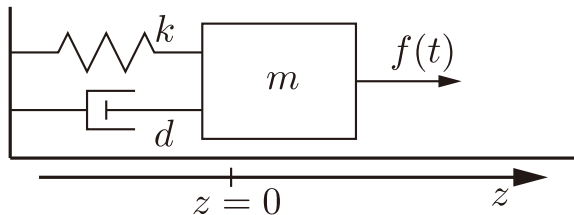
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]
- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)

動的なシステムのモデリング

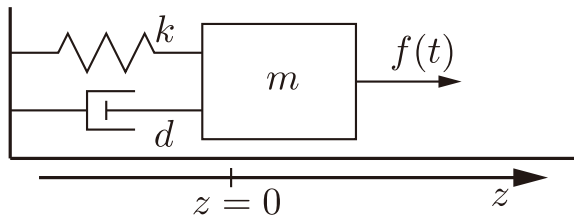
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]
- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]
- バネ: 伸び $z(t)$ に比例した反力 $-kz(t)$ [N]
- ダンパ: 速度 $\dot{z}(t)$ に比例した反力 $-d\dot{z}(t)$ [N]

動的なシステムのモデリング

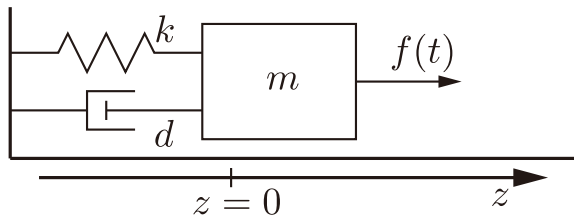
マス-バネ-ダンパ系



- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]
- バネ: 伸び $x(t)$ に比例した反力 $-kz(t)$ [N]
- ダンパ: 速度 $\dot{x}(t)$ に比例した反力 $-d\dot{z}(t)$ [N]

動的なシステムのモデリング

マス-バネ-ダンパ系

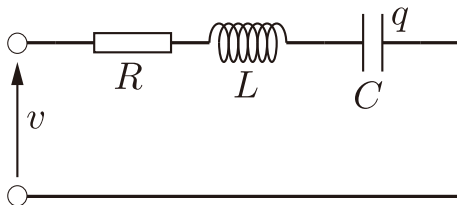


- (質量) \times (加速度) = (外から加わる力)
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]
- バネ: 伸び $x(t)$ に比例した反力 $-kz(t)$ [N]
- ダンパ: 速度 $\dot{x}(t)$ に比例した反力 $-d\dot{z}(t)$ [N]

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

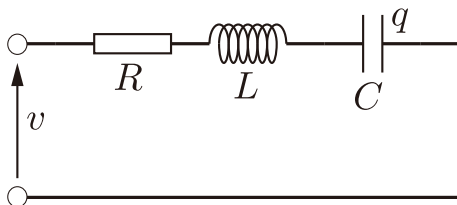
動的なシステムのモデリング

RLC 回路



動的なシステムのモデリング

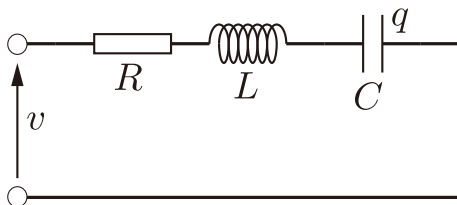
RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H] 抵抗の抵抗値: R [Ω] コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $q(t_0) = q_0$ [q] $\dot{q}(t_0) = 0$ [A]

動的なシステムのモデリング

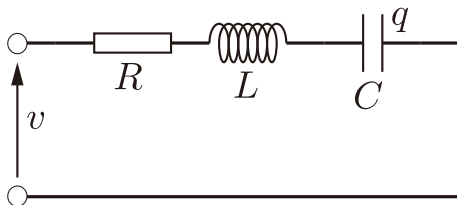
RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H] 抵抗の抵抗値: R [Ω] コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $q(t_0) = q_0$ [q] $\dot{q}(t_0) = 0$ [A]
- (入力電圧) = (電圧降下の和)

動的なシステムのモデリング

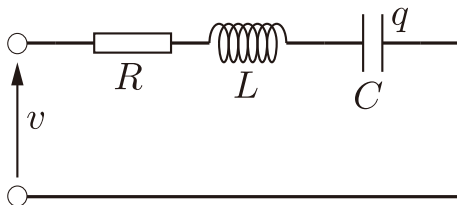
RLC 回路



- (入力電圧) = (電圧降下の和)

動的なシステムのモデリング

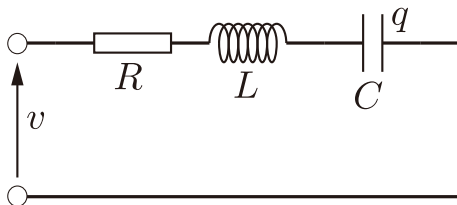
RLC 回路



- (入力電圧) = (電圧降下の和)
- 加える電圧: $v(t)$ [V]
- 抵抗: 電流 $i(t)$ に比例した電圧降下 $Ri(t)$
- コイル: 電流の変化率 $\dot{i}(t)$ に比例した電圧降下 $L\dot{i}(t)$
- コンデンサ: 蓄えられた電荷 $q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ に
比例した電圧降下 $\frac{1}{C}q(t)$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



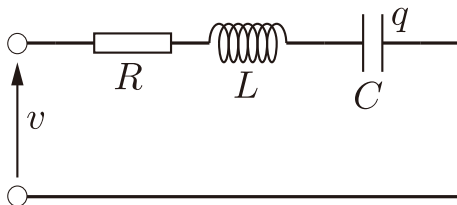
- (入力電圧) = (電圧降下の和)
- 加える電圧: $v(t)$ [V]
- 抵抗: 電流 $i(t)$ に比例した電圧降下 $Ri(t)$
- コイル: 電流の変化率 $\dot{i}(t)$ に比例した電圧降下 $L\dot{i}(t)$
- コンデンサ: 蓄えられた電荷 $q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ に

比例した電圧降下 $\frac{1}{C}q(t)$

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau = v(t)$$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



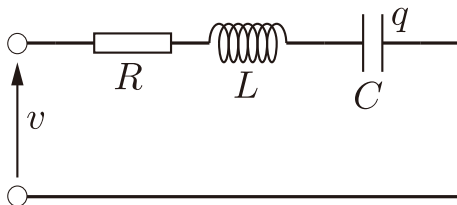
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \quad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

- 12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- 01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- 01 / 14 ラプラス変換の性質
- 01 / 21 ラプラス変換と微分方程式
- 01 / 28 ラプラス変換と微分方程式

01/07, 2025. 13:00- の授業

01/06 – 10, 2025. メディア授業デー

01/07, 2025. 13:00- の授業は, teams により, オンラインで実施します.
出席してください.

teams の URL は, moodle のアナウンスメントから確認してください.

授業は録画し, 後日 HP に掲示します. 01/07, 2025. 13:00- に都合のつかない人は, 録画を視聴し授業の内容を把握してください.