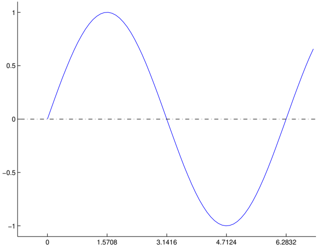
線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

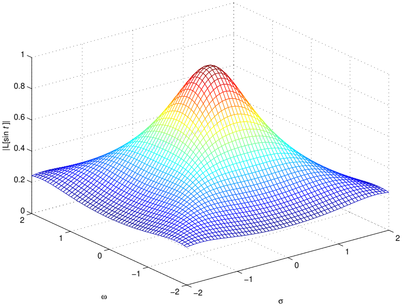
線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

ラプラス変換の定義



$\sin t$



$|\mathcal{L}[\,\sin t\,]|$

ラプラス変換の定義

定 義: ラプラス変換
時間関数 $x(t)$, $t \geq 0$ **(ただし** $t < 0$ **の時は** $x(t) = 0$ **とする) のラプラス変換をつぎで定義する.**

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

$x(t)$: **時間関数** $x(s)$: $x(t)$ **のラプラス変換**
s : **複素数** $s = \sigma + j\omega$

より正確には $\mathcal{L}_-[\, x(t)\,] = \int_{0-}^\infty x(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^\infty x(t) e^{-st} dt$

注 意

ラプラス変換の定義

本来なら関数 $x(t)$ のラプラス変換を表す記号

$$X(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] \qquad\qquad \tilde{x}(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$$

- 記号が煩雑になる
- 関数 $x(t)$ を考えているのか, あるいはそのラプラス変換 $x(s)$ を考えているのかは, 前後の文脈から明らか

あえて $x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,]$ のように表記する.

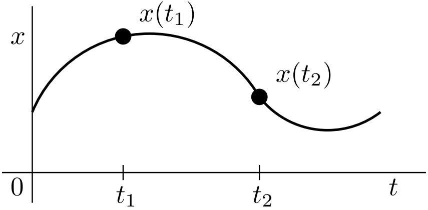
ラプラス変換の定義

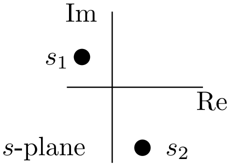
$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

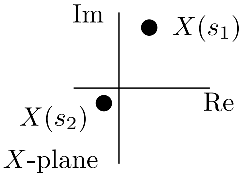
t : 時間 (実数) $x(t)$: 各 t に対して $x(t)$ は実数

s : 複素数 $s = \sigma + j\omega$ $x(s)$: 各 s に対して $x(s)$ は複素数

ラプラス変換: $\mathcal{L}[\,\cdot\,]$ $\Longrightarrow$





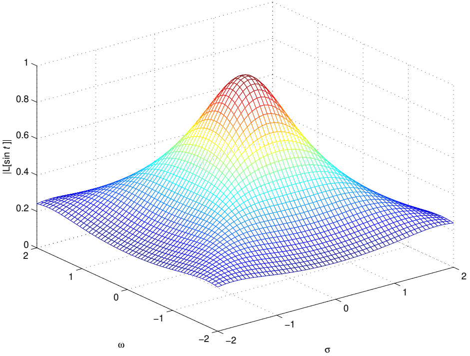


ラプラス変換の定義

例えば, $|x(s)|$ ならグラフにできる

例 題: $\sin t \qquad x(t) = \sin t \qquad x(s) = \mathcal{L}[\,\sin t\,] = \dfrac{1}{s^2+1}$

$$|x(s)| = |x(\sigma + j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 - \omega^2 + 1)^2 + 4\omega^2}}$$



$|\mathcal{L}[\,\sin t\,]|$

ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない
    - ラプラス変換の収束領域: $\mathrm{Re}[\, s \,] > \alpha$

ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)
- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない
  - ラプラス変換の収束領域: $\mathrm{Re}[\, s \,] > \alpha$

- 多くの関数 (指数オーダーの関数) がラプラス変換可能
- ラプラス変換の利用 (微分方程式を解く際に) 収束領域を陽に考慮する必要はない
  - ラプラス変換には, 深い理論があります. ぜひ, 参考図書に目をとおしてください.

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

ステップ関数: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[\, u(t) \,] = \frac{1}{s}$$

収束領域: $\mathrm{Re}[\, s \,] > 0$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

指数関数: e^{-at} **(**$a > 0$**)**

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

収束領域: $\mathrm{Re}[\, s\,] > -a$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

正弦関数: $\sin \omega t$

$$\mathcal{L}[\, \sin \omega t \,] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

余弦関数: $\cos \omega t$

$$\mathcal{L}[\, \cos \omega t \,] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

基本的な関数のラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

ランプ関数: $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\,r(t)\,] = \frac{1}{s^2}$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x)\dot{g}(x)dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x)dx$$

ラプラス変換の定義

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

インパルス関数: $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \qquad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$\delta(t)$ **の性質:** $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \quad (f(t):$ **時間関数**$)$

$$\mathcal{L}[\, \delta(t) \,] = 1$$

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

12 / 24	なぜラプラス変換を考えるのか 動的なシステムのモデリング
01 / 07	ラプラス変換の定義 基本的な関数のラプラス変換
01 / 14	ラプラス変換の性質
01 / 21	ラプラス変換と微分方程式
01 / 28	ラプラス変換と微分方程式