線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング

01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換

01 / 14 ラプラス変換の性質

01 / 21 ラプラス変換と微分方程式

01 / 28 ラプラス変換と微分方程式

ラプラス変換の性質

定 義: ラプラス変換

時間関数 $x(t)$, $t \geq 0$ (ただし $t < 0$ の時は $x(t) = 0$ とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

$x(t)$: 時間関数　　$x(s)$: $x(t)$ のラプラス変換

s : 複素数 $s = \sigma + j\omega$

より正確には $\mathcal{L}_-[\, x(t)\,] = \int_{0-}^\infty x(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^\infty x(t) e^{-st} dt$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

線形性

$$\mathcal{L}[\, ax(t) + by(t) \,] = ax(s) + by(s)$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt}\,] = sx(s) - x(0)$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x)\dot{g}(x)dx = [\, f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x)dx$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt} \,] = sx(s) - x(0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2} \,] = \mathcal{L}[\, \frac{dy(t)}{dt} \,] &= sy(s) - y(0) \\
&= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0) \\
&= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)
\end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t) \,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt} \,] &= sx(s) - x(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2} \,] &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^3x(t)}{dt^3} \,] &= s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^4x(t)}{dt^4} \,] &= s^4x(s) - s^3x(0) - s^2\dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - \dddot{x}(0) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \qquad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \qquad y(0) = \int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

$$\int_0^t y(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1 d\tau\,] = \mathcal{L}[\int_0^t y(\tau)d\tau\,] &= \frac{1}{s}y(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1\,] \\
&= \frac{1}{s}\frac{1}{s}x(s) = \frac{1}{s^2}x(s)
\end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t) \,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t x(\tau) d\tau \,] &= \frac{1}{s} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^2} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^3} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} x(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^4} x(s) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

微 分:　s をかけること

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

積 分:　$\dfrac{1}{s}$ をかけること

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$$

表の世界	入力 $u(t)$	$\longrightarrow$	微分方程式	$\longrightarrow$	出力 $x(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	ラプラス変換				逆ラプラス変換
	$\downarrow$				$\uparrow$
裏の世界	$U(s)$	$\longrightarrow$	代数方程式	$\longrightarrow$	$x(s)$

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C