線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

ラプラス変換と微分方程式

微 分:　s をかけること

$$\mathcal{L}\left[\,\frac{dx(t)}{dt}\,\right] = sx(s) - x(0)$$

積 分:　$\dfrac{1}{s}$ をかけること

$$\mathcal{L}\left[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,\right] = \frac{1}{s}x(s)$$

表の世界	入力 $u(t)$	$\longrightarrow$	微分方程式	$\longrightarrow$	出力 $x(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	ラプラス変換				逆ラプラス変換
	$\downarrow$				$\uparrow$
裏の世界	$U(s)$	$\longrightarrow$	代数方程式	$\longrightarrow$	$x(s)$

ラプラス変換と微分方程式

例題 1. $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $x(0) = 3$ の解を求める.

$$x(s) = 3\frac{1}{s+2} \qquad x(t) = 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 2. $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $x(0) = 3$ **の解を求める.**

$$x(s) = \frac{3s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0)$$

ステップ関数 $u(t)$: $\quad \mathcal{L}[\,u(t)\,] = \dfrac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{3s+1}{s(s+2)} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 3. $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = 1$ の解を求める.

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = 4\frac{1}{s+1} - 3\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 4. $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = 1$ **の解を求める.**

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s+1} - \frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

ステップ関数 $u(t)$: $\quad \mathcal{L}[\,u(t)\,] = \dfrac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{s+2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 5. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = e^{-t} + 4te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2 x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a} \qquad \mathcal{L}[\,te^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)^2} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{(s+1)^2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 6. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + 3\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = u(t) + 3te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

ステップ関数 $u(t)$: $\quad \mathcal{L}[\,u(t)\,] = \dfrac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\,] = \frac{1}{s+a} \qquad \mathcal{L}[\,te^{-at}\,] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{(s+1)^2}$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 7. $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = -1$, $x(0) = 1$ **の解を求める.**

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$$

$$x(t) = e^{-t}\cos 3t$$

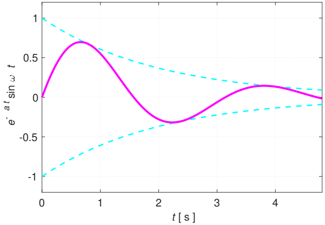
$$\mathcal{L}[\,\dot{x}(t)\,] = sx(s) - x(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{x}(t)\,] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\sin\omega t\,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

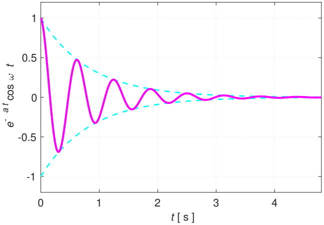
$$\mathcal{L}[\,e^{-at}\cos\omega t\,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$e^{-at}\sin\omega t \quad e^{-at}\cos\omega t$

ラプラス変換と微分方程式



a $e^{-at}\sin\omega t,\ a = 0.5,\ \omega = 2$



b $e^{-at}\cos\omega t,\ a = 1.2,\ \omega = 10$

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング

01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換

01 / 14 ラプラス変換の性質

01 / 21 ラプラス変換と微分方程式

01 / 28 ラプラス変換と微分方程式