線形常微分方程式とラプラス変換

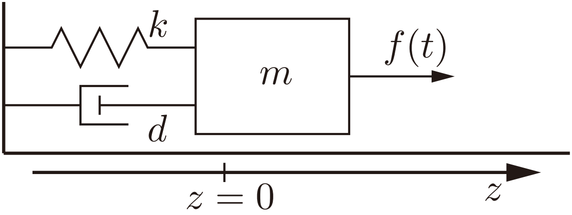
自然科学への扉 C

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

ラプラス変換と微分方程式

マス–バネ–ダンパ系



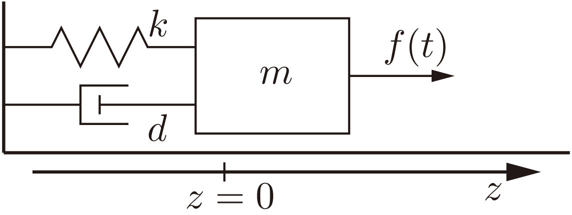
$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

- **外部から加わる力**: $f(t)$ $[\,\mathrm{N}\,]$ **入力 (原因)**
- **質点の位置**: $z(t)$ $[\,\mathrm{m}\,]$ **出力 (結果)**

ラプラス変換と微分方程式

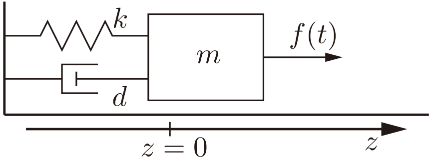
$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0)$$



$$\mathcal{L}[\,\dot{z}(t)\,] = sz(s) - z(0) \qquad \mathcal{L}[\,\ddot{z}(t)\,] = s^2 z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)$$

ラプラス変換と微分方程式



$$z(s) = \frac{1}{ms^2+ds+k} f(s) + \frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0) + \frac{ms+d}{ms^2+ds+k} z(0)$$

入力 f から z への伝達関数 $\dfrac{1}{ms^2+ds+k}$

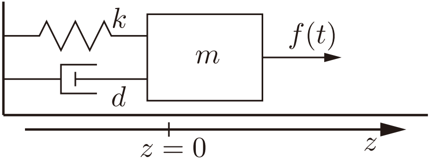
初期条件 $\dot{z}(0)$ から z への伝達関数 $\dfrac{m}{ms^2+ds+k}$

初期条件 $z(0)$ から z への伝達関数 $\dfrac{ms+d}{ms^2+ds+k}$

分母多項式 ms^2+ds+k

ラプラス変換と微分方程式

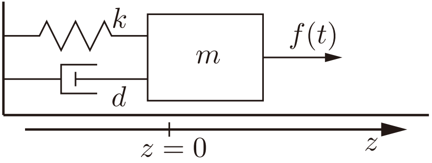
例題 1. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 3$, $k = 2$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 1.　$f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=3$, $k=2$ の時の解



$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

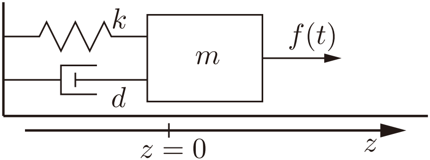
$$z(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=2\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$z(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

- $d=3\neq 0$:　減衰あり　(ブレーキが掛かる $\to e^{-t}$, e^{-2t})
- $ms^2+ds+k=0$ が, 相異なる実数根 $(s=-1,-2)$ をもつ場合

ラプラス変換と微分方程式

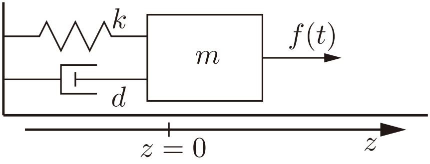
例題 2. $f(t)=0$, $\dot{z}(0)=0$, $z(0)=1$ かつ $m=1$, $d=0$, $k=4$ の時の解



$$z(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}f(s)+\frac{ms+d}{ms^2+ds+k}z(0)+\frac{m}{ms^2+ds+k}\dot{z}(0)$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 2. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 0$, $k = 4$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

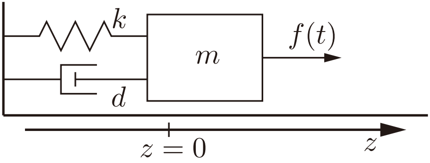
$$z(s) = \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 2^2}$$

$$z(t) = \cos 2t$$

- $d = 0$: 減衰なし (ブレーキが掛からないので, 動き続ける)
- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 虚数 (の共役) 根 ($s = \pm 2j$) をもつ場合

ラプラス変換と微分方程式

例題 3. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 2$, $k = 5$ の時の解



$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s+2}{(s+1)^2 + 4}$$

ラプラス変換と微分方程式

$$z(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}[\, e^{-at} \sin \omega t \,] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

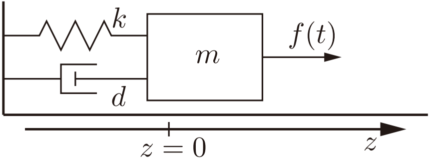
$$\mathcal{L}[\, e^{-at} \cos \omega t \,] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

$$z(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

ラプラス変換と微分方程式

例題 3. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 2$, $k = 5$ の時の解



$$Z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

$$z(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$z(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

- $d = 2 \neq 0$: 減衰あり (ブレーキが掛かる $\to e^{-t}$)
- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 複素 (共役) 根 ($s = -1 \pm 2j$) をもつ場合

線形常微分方程式とラプラス変換

自然科学への扉 C

12 / 24 なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング

01 / 07 ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換

01 / 14 ラプラス変換の性質

01 / 21 ラプラス変換と微分方程式

01 / 28 ラプラス変換と微分方程式