演習問題 3.1

例題 2.2 の RLC 回路を考える．初期時刻を $t_0 = 0$ とし，初期条件 $q(0)$ と $\dot{q}(0)$ の影響を考慮したラプラス変換を考える．

1. 入力 v から出力 q への伝達関数を求めなさい．
2. 初期条件 $\dot{q}(0)$ から出力 q への伝達関数を求めなさい．
3. 初期条件 $q(0)$ から出力 q への伝達関数を求めなさい．
4. $v(t) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, $q(0) = 2$ に対する出力 q を考える．(分母多項式) $= 0$ の方程式が，相異なる実数根を持つ適当な条件を設定し，この時の解 $q(t)$ を求めなさい．
5. $v(t) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, $q(0) = 2$ に対する出力 q を考える．(分母多項式) $= 0$ の方程式が，虚数 (の共役) 根を持つ適当な条件を設定し，この時の解 $q(t)$ を求めなさい．
6. $v(t) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, $q(0) = 2$ に対する出力 q を考える．(分母多項式) $= 0$ の方程式が，複素共役根を持つ適当な条件を設定し，この時の解 $q(t)$ を求めなさい．

微分方程式 $L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + (1/C)q(t) = v(t)$ の両辺をラプラス変換

$$\mathcal{L}[\, L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + (1/C)q(t)\,] = \mathcal{L}[\, v(t)\,]$$
$$L(s^2q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)) + R(sq(s) - q(0)) + (1/C)q(s) = v(s)$$
$$(Ls^2 + Rs + (1/C))q(s) = v(s) + Lsq(0) + L\dot{q}(0) + Rq(0)$$
$$q(s) = \frac{1}{Ls^2 + Rs + (1/C)}v(s) + \frac{L}{Ls^2 + Rs + (1/C)}\dot{q}(0) + \frac{Ls + R}{Ls^2 + Rs + (1/C)}q(0)$$

$$q(s) = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}v(s) + \frac{LC}{LCs^2 + RCs + 1}\dot{q}(0) + \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}q(0)$$

- 入力 v から q への伝達関数:

$$\frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 初期条件 $\dot{q}(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 初期条件 $q(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 初期条件 $q(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 例えば $L = 1$, $R = 3$, $C = 1/2$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$ の根は $s = -1, -2$ となる. この時

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1} q(0) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} 2 \\ &= \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

より $q(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}$.

- 初期条件 $q(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 例えば $L = 1$, $R = 0$, $C = 1$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 1 = (s + j)(s - j) = 0$ の根は $s = \pm j$ となる. この時

$$q(s) = \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1} q(0) = \frac{s}{s^2 + 1} 2$$

より $q(t) = 2 \cos t$.

- 初期条件 $q(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 例えば $L = 1$, $R = 2$, $C = 1/2$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1 = 0$ の根は $s = -1 \pm j$ となる. この時

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1} q(0) = \frac{s+2}{(s+1)^2 + 1} 2 \\ &= 2\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}\right) \end{aligned}$$

より $q(t) = 2e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

演習問題 3.2

演習問題 3.1 と同様に回答できます