電気数学 3
ラプラス変換・フーリエ解析

平田 研二

Copyright ©2025 by Kenji Hirata

preamble

電気数学 3
ラプラス変換・フーリエ解析

目 次

preamble **i**

第 1 章　はじめに **1**

第 2 章　モデリングの例 **3**
2.1　微分方程式によるモデリング 3

第 3 章　ラプラス変換 **7**
3.1　ラプラス変換 7
3.2　ラプラス変換の性質 10
3.3　ラブラス変換と微分方程式 14
3.4　ラプラス変換と伝達関数 17
3.5　演習問題 20
3.6　演習問題 サンプル解答 21

第 4 章　フーリエ解析 **23**
4.1　Fourier 級数 23
4.1.1　級数展開 23
4.1.2　Fourier 級数 24
4.1.3　複素 Fourier 級数 27
4.1.4　Fourier 係数の計算 28
4.2　Fourier 変換 35
4.3　離散 Fourier 変換 –離散化と局所化– 38
4.3.1　周波数領域での局所性と時間領域でのサンプリング . . 39
4.3.2　時間領域での局所性と周波数領域でのサンプリング . . 42
4.4　離散時間 Fourier 変換 44
4.4.1　サンプリング定理 45
4.4.2　エイリアシング aliasing 49
4.5　離散 Fourier 変換 54
4.6　演習問題 62
4.7　演習問題 サンプル解答 63

postamble **67**

図 目 次

2.1 マス - バネ - ダンパ系 3
2.2 RLC 回路 4
2.3 剛体の回転運動 5

4.1 区間 $[\,-t_{\mathrm{p}},\ t_{\mathrm{p}}\,)$ で定義された関数 $f(t)$ 24
4.2 Fourier 級数展開のイメージ 26
4.3 信号 $f(t)$ と Fourier 級数展開による近似 31
4.4 信号 $f(t)$ と Fourier 級数展開による近似 $\tilde{f}(t)$ 32
4.5 矩形波 $f(t)$ 33
4.6 矩形波 $f(t)$ と Fourier 級数展開による近似 34
4.7 周期関数 $f(t+2t_{\mathrm{p}}) = f(t)$ の Fourier 係数 $|c_n|$ 35
4.8 区分求積と Riemann 積分 37
4.9 信号 $f(t)$ の離散化と局所化 38
4.10 Fourier 変換 $F(\omega)$ の離散化と局所化 39
4.11 信号 $f(t)$ とサンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$, $t_{\mathrm{s}} \leq \dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{n}}}$ 47
4.12 サンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$ と信号 $f(t)$ の復元 48
4.13 信号 $f(t)$ とサンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$, $t_{\mathrm{s}} \not\leq \dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{n}}}$ 49
4.14 信号 $f(t)$ の復元, サンプリング定理を満たさない場合 50
4.15 $H(\omega)$ と $\hat{H}(\omega)$ 53
4.16 $F(\omega)$ と $\hat{F}(\omega)$ 54
4.17 時間領域での局所性の仮定 $f(t) = 0,\ t < 0$ and $t \geq t_{\mathrm{f}} = Nt_{\mathrm{s}}$ をみたす信号 $f(t)$ とサンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ 59
4.18 離散 Fourier 変換 $F(n\omega_{\mathrm{s}})$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ 60
4.19 離散 Fourier 逆変換によるサンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ の復元 60
4.20 Fourier 変換 $F(\omega)$ 61
4.21 離散 Fourier 逆変換によるサンプリング $f(kt_{\mathrm{s}})$ の復元 61
4.22 離散 Fourier 変換 $F(n\omega_{\mathrm{s}})$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ 61

表 目 次

3.1　基本的な関数のラプラス変換表 13

第1章　はじめに

はじめに

第2章　モデリングの例

はじめに

第 2 章のポイント

- 微分方程式により色々なシステムをモデリングしよう.

2.1　微分方程式によるモデリング

つぎの例を考えよう.

例 題 2.1. Fig. 2.1 のマス - バネ - ダンパ系を考えよう. 質点の質量を m [kg], バネ定数を k [N/m], ダンパ定数を d [Ns/m], 外部から加わる力を $f(t)$ [N], 質点の位置を $z(t)$ [m] でそれぞれあらわす. ただしバネの自然長は, 質点の位置の原点 $z = 0$ と一致しているとする. また質点は, 初期時刻 $t = t_0$ で $z(t_0) = z_0$ [m] の初期位置と $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s] の初期速度をもっていたとする.

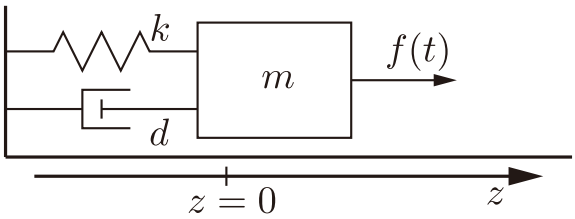

Fig. 2.1: マス - バネ - ダンパ系

このマス - バネ - ダンパ系の運動方程式を考えよう. バネは伸び $z(t)$ に比例した反力 $kz(t)$ を発生し, ダンパは速度 $\dot{z}(t)$ に比例した反力 $d\dot{z}(t)$ を発生する. 運動方程式は, (質量) × (加速度) = (外から加わる力) より

$$m\ddot{z}(t) = f(t) - d\dot{z}(t) - kz(t)$$

で与えられる. $t = t_0$ での初期条件もふまえて, マス - バネ - ダンパ系の振る舞いは微分方程式

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \qquad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

で記述される. ただしここで $u = f$ とする. □

例題 2.1 の考えたマス - バネ - ダンパ系は, 機械系 (メカニカルシステム) の代表的な例である. 同じ機械系でも回転運動を考える場合, あるいは電気系のシステムさらにこれらが融合したシステムなど, 様々なシステムを考察の対象とする必要がある. 以下の簡単な例をよく把握して, 複雑なシステムのモデリングのための第一歩にして欲しい.

例 題 2.2. Fig. 2.2 の RLC 回路を考える. 抵抗の抵抗値を R [Ω], コイルのインダクタンスを L [H], コンデンサの静電容量を C [F], 加える電圧を $v(t)$ [V] でそれぞれあらわす. 電圧 v を入力, コンデンサに蓄えられる電荷 q [C] を出力と考え, この RLC 回路をモデリングしよう. ただし初期時刻 t_0 では, $q(t_0) = q_0$ [q], $\dot{q}(t_0) = 0$ [A] であったとする.

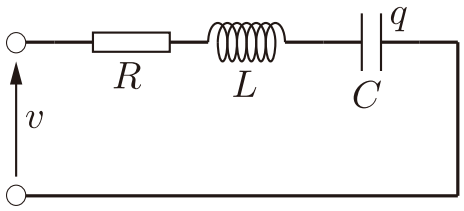

Fig. 2.2: RLC 回路

回路を流れる電流を i [A] とする. コイルでの電圧降下は $L\dot{i}(t)$, 抵抗での電圧降下は $Ri(t)$, コンデンサでの電圧降下は $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ で与えられる. これより

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

がえられる. また $q(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ であるので, $\dot{q}(t) = i(t)$, $\ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$ と併せて

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

と表現できる. $t = t_0$ での初期条件もふまえて, RLC 回路の振る舞いは微分方程式

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \qquad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

で記述される. ただしここで $u = v$ とする. □

例 題 2.3. Fig. 2.3 の剛体の回転運動を考えよう. 回転体の慣性モーメントを J [kgm^2], 回転体と地面の間の摩擦係数を B_ℓ [Nms/rad] とする. 回転体は, バネ定数 K [Nm/rad] のねじりバネを介して壁に接続されており, このバネを回転軸として回転する. 外部から加わるトルクを $\tau(t)$ [Nm], 回転体の回転角度を $\theta(t)$ [rad] とし, $\theta = 0$ ではバネのねじれはないとする. また初期時刻 t_0 での初期角度, 初期回転速度を $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad], $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s] とする.

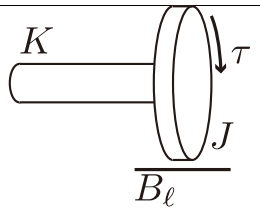

Fig. 2.3: 剛体の回転運動

回転の運動方程式を求めよう．地面との間の摩擦によるトルク, ねじりバネが発生するトルクは, それぞれ $B_\ell\dot{\theta}(t)$, $K\theta(t)$ で与えられる．よって運動方程式は

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - B_\ell\dot{\theta}(t) - K\theta(t)$$

となる．$t = t_0$ での初期条件もふまえて, この回転系の振る舞いは微分方程式

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = u(t) \qquad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

で記述される．ただしここで $u = \tau$ とする． □