

第3章 ラプラス変換

はじめに

第3章のポイント

- ラプラス変換の定義を理解しよう.
- 微分 (演算) と積分 (演算) のラプラス変換による表現を理解しよう.
- ラプラス変換により, 微分方程式の解を求めよう.
- 伝達関数を理解しよう
- ラプラス変換表を覚える必要はありません.

本章では, 表記を簡単にするため, $x(t)$ の導関数を $\dot{x}(t)$ と表記する. つまり, $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ や $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ のようにも表記する.

3.1 ラプラス変換

定義 3.1 (ラプラス変換, Laplace transform). 関数 $x(t)$, $t \geq 0$ (ただし $t < 0$ の時は $x(t) = 0$ とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

ただしここで $s = \sigma + j\omega$ は複素数である. □

本来なら関数 $x(t)$ のラプラス変換を表す記号として, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ や $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ などのように, x とは異なる記号 X や $\tilde{x}$ などを使わなければいけない. 記号が煩雑になると, 関数 $x(t)$ を考えているのか, あるいはそのラプラス変換 $x(s)$ を考えているのかは, 前後の文脈から明らかと思われるので, 本稿では, あえて $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ のように表記する.

より正確には, 本稿では

$$x(s) = \mathcal{L}_-[x(t)] = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

をラプラス変換の定義とする. つまり積分区間は $t = 0$ を含んでいると考える.

- すべての時間関数 $x(t)$ がラプラス変換可能なわけではない (どんな複素数 s を考えても, 積分が収束しない)

- ラプラス変換可能な関数 $x(t)$ でも, すべての複素数 s について積分が収束するわけではない
 - ラプラス変換の収束領域: $\operatorname{Re}[s] > \alpha$
- 多くの関数 (指数オーダーの関数) がラプラス変換可能
- ラプラス変換の利用 (微分方程式を解く際に) 収束領域を陽に考慮する必要はない
 - ラプラス変換には, 深い理論があります. ぜひ, 色々な教科書に目をおしてください.

具体的な関数を考え, 関数のラプラス変換を実際に計算してみよう.

例題 3.1 (ステップ関数: $u(t)$).

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) - \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-s \cdot 0} = 0 + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

が確認できる. □

例題 3.2 (指数関数: e^{-at} $a > 0$).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right) - \left(-\frac{1}{s+a} \right) e^{-(s+a) \cdot 0} = 0 + \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

が確認できる. □

三角関数 $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ のラプラス変換は, オイラーの公式 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ に注意し

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

を利用すれば, 簡単に求めることができる.

例題 3.3 (正弦関数: $\sin \omega t$).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{1}{2j} \frac{s + j\omega - (s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

が確認できる. □

例題 3.4 (余弦関数: $\cos \omega t$).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{1}{2} \frac{s + j\omega + s - j\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

が確認できる. □

つぎのランプ関数 $r(t) = t$ のラプラス変換は, 部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

を使えば, 簡単に求めることができる.

例題 3.5 (ランプ関数: $r(t)$).

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[r(t)] &= \int_0^\infty r(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt \\ &= \left[t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s}te^{-st}\right) - \left(-\frac{1}{s}0e^{-s0}\right) + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{s^2}$$

が確認できる. □

例題 3.6. インパルス関数: $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

インパルス関数 $\delta(t)$ の性質: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

よって

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

が確認できる. □

3.2 ラプラス変換の性質

例題 3.7 (線型性: $\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = ax(s) + by(s)$).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ax(t) + by(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t) + by(t))e^{-st}dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt \\ &= a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)] \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = ax(s) + by(s)$$

が確認できる. □

関数 $x(t)$ の微分 $\frac{dx(t)}{dt}$ のラプラス変換は, 部分積分の公式を利用し, 簡単に求めることができる.

例題 3.8 (時間微分: $\mathcal{L}[\frac{dx(t)}{dt}] = sx(s) - x(0)$).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)] &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \left[x(t) \left(-\frac{1}{s}e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(-\frac{1}{s}e^{-st} \right) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s}x(t)e^{-st} \right) - \left(-\frac{1}{s}x(0)e^{-s0} \right) + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}x(0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}[\frac{dx(t)}{dt}] \end{aligned}$$

$$s\mathcal{L}[x(t)] - x(0) = \mathcal{L}[\frac{dx(t)}{dt}]$$

よって

$$\mathcal{L}[\frac{dx(t)}{dt}] = sx(s) - x(0)$$

が確認できる. □

ここで $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ とおくと

$$\frac{dy(t)}{dt}$$

のラプラス変換, つまり

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dy(t)}{dt}$$

のラプラス変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sy(s) - y(0) \\ &= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0) \\ &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

と求めることができる. これは $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ とおいて, というように繰り返して考えることができるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= sx(s) - x(0) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right] &= s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^4x(t)}{dt^4}\right] &= s^4x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right] &= s^nx(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{n-2}(0) - x^{n-1}(0)\end{aligned}$$

がわかる.

関数 $x(t)$ の積分 $\int_0^t x(\tau)d\tau$ のラプラス変換も簡単に求めることができる.

例題 3.9 (時間積分: $\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$). $y(t)$ を

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

とおく. ここで

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad y(0) = \int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

に注意して $\dot{y}(t) = x(t)$ のラプラス変換を考える.

$$x(s) = \mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sy(s) - y(0) = s\mathcal{L}[y(t)] - 0 = s\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right]$$

$$\frac{1}{s}x(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right]$$

よって

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$$

が確認できる. □

さらに

$$\int_0^t y(\tau)d\tau$$

のラプラス変換, つまり

$$\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1 d\tau$$

のラプラス変換を考えると

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}y(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1\right] = \frac{1}{s}\frac{1}{s}x(s) = \frac{1}{s^2}x(s)$$

がえられる. これも繰り返し考えることができるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] &= \frac{1}{s}x(s) \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1)d\tau_1 d\tau\right] &= \frac{1}{s^2}x(s) \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 d\tau\right] &= \frac{1}{s^3}x(s) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-3}} \int_0^{\tau_{n-2}} x(\tau_{n-2})d\tau_{n-2}d\tau_{n-3} \cdots d\tau_2 d\tau_1 d\tau\right] &= \frac{1}{s^n}x(s)\end{aligned}$$

がわかる.

例題 3.10 (畳み込み積分: $\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)]$).

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)]$$

□

例題 3.11 (最終値の定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sx(s)$). $\frac{dx(t)}{dt}$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

に対して, 両辺の $s \rightarrow 0$ の極限

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow 0} (sx(s) - x(0))$$

を考える. 右辺より

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} dt = [x(t)]_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0)\end{aligned}$$

一方左辺より

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sx(s) - x(0)) = \lim_{s \rightarrow 0} sx(s) - x(0)$$

であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sx(s) - x(0)$$

よって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sx(s)$$

が確認できる. □

Table 3.1: 基本的な関数のラプラス変換表

関数 $x(t)$	ラプラス変換 $x(s)$
$u(t) = 1$ (ステップ関数)	$\frac{1}{s}$
$r(t) = t$ (ランプ関数)	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{n!} t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$ (インパルス関数)	1
$ax(t) + by(t)$	$ax(s) + by(s)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sx(s) - x(0)$
$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} x(s)$

matlab note 3.1 (laplace). コマンド laplace により, ラプラス変換の計算ができる. 例えば, $\sin 3t$ のラプラス変換は

```
1: syms t; syms s;
2: laplace( sin( 3 * t ), t, s )
```

で, $\dot{x}(t)$ のラプラス変換は

```
1: syms t; syms s; syms x( t );
2: laplace( diff( x( t ) ) )
```

で計算できる. □

3.3 ラプラス変換と微分方程式

以下では, 表記を簡単にするため, $x(t)$ の導関数を $\dot{x}(t)$ のように表記する. つまり, $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ や $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ とする.

例題 3.12. 微分方程式 $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $x(0) = 3$ の解を求めよう. 両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{x}(t) + 2x(t)] &= \mathcal{L}[0] \\ sx(s) - x(0) + 2x(s) &= 0 \\ (s + 2)x(s) &= 3 \\ x(s) &= 3 \frac{1}{s + 2}\end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = 3e^{-2t}$$
□

例題 3.13. 微分方程式 $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $x(0) = 3$ の解を求めよう. 両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{x}(t) + 2x(t)] &= \mathcal{L}[u(t)] \\ sx(s) - x(0) + 2x(s) &= 1/s \\ (s + 2)x(s) &= 3 + 1/s \\ x(s) &= \frac{3s + 1}{s(s + 2)}\end{aligned}$$

$$A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + 2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{3s + 1}{s(s + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s + 2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}$$
□

例題 3.14. 微分方程式 $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = 1$ の解を求めよう.

両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)] &= \mathcal{L}[0] \\ s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3(sx(s) - x(0)) + 2x(s) &= 0 \\ (s^2 + 3s + 2)x(s) &= s + 2 + 3 \\ x(s) &= \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 2)}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s + 1} + B\frac{1}{s + 2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = 4\frac{1}{s + 1} - 3\frac{1}{s + 2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

□

例題 3.15. 微分方程式 $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 2$, $x(0) = 1$ の解を求めよう. 両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)] &= \mathcal{L}[u(t)] \\ s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3(sx(s) - x(0)) + 2x(s) &= 1/s \\ (s^2 + 3s + 2)x(s) &= s + 2 + 3 + 1/s \\ x(s) &= \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ &= \frac{s + 5}{s(s + 1)(s + 2)}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + 1} + C\frac{1}{s + 2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s + 1} - \frac{5}{2}\frac{1}{s + 2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

□

例題 3.16. 微分方程式 $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 1$ の解を求めよう.

両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)] &= \mathcal{L}[0] \\ s^2 - sx(0) - \dot{x}(0) + 2(sx(s) - x(0)) + x(s) &= 0 \\ (s^2 + 2s + 1)x(s) &= s + 3 + 2 \\ x(s) &= \frac{s + 5}{s^2 + 2s + 1} \\ &= \frac{s + 5}{(s + 1)^2}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s + 1} + B\frac{1}{(s + 1)^2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)^2} = \frac{1}{s + 1} + 4\frac{1}{(s + 1)^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = e^{-t} + 4te^{-t}$$

□

例題 3.17. 微分方程式 $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $\dot{x}(0) = 3$, $x(0) = 1$ の解を求めよう.

両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)] &= \mathcal{L}[u(t)] \\ s^2 - sx(0) - \dot{x}(0) + 2(sx(s) - x(0)) + x(s) &= 1/s \\ (s^2 + 2s + 1)x(s) &= s + 3 + 2 + 1/s \\ x(s) &= \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s^2 + 2s + 1)} \\ &= \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s + 1)^2}\end{aligned}$$

$$A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + 1} + C\frac{1}{(s + 1)^2}$$

との係数比較により,

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s + 1)^2} = \frac{1}{s} + 3\frac{1}{(s + 1)^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = u(t) + 3te^{-t}$$

□

例題 3.18. 微分方程式 $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$, $\dot{x}(0) = -1$, $x(0) = 1$ の解を求めよう.

両辺ラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t)] &= \mathcal{L}[0] \\ s^2 - sx(0) - \dot{x}(0) + 2(sx(s) - x(0)) + 10x(s) &= 0 \\ (s^2 + 2s + 10)x(s) &= s - 1 + 2 \\ x(s) &= \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 10} \\ &= \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 3^2}\end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = e^{-t} \cos 3t$$

□

matlab note 3.2 (ilaplace). コマンド `ilaplace` により, 逆ラプラス変換の計算ができる. 例えば, 例題 3.16 の逆ラプラス変換は

```
1: syms t; syms s;
2: x( s ) = ( s + 5 ) / ( s^2 + s * 2 + 1 )
3: x( t ) = ilaplace( x( s ), s, t )
```

で計算できる.

□

3.4 ラプラス変換と伝達関数

例題 2.1 のマス - バネ - ダンパ系をもう一度考えよう. 運動方程式 $m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$ の両辺をラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] \\ m(s^2z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)) + d(sz(s) - z(0)) + kz(s) &= f(s) \\ (ms^2 + ds + k)z(s) &= f(s) + msz(0) + m\dot{z}(0) + dz(0)\end{aligned}$$

がえられる. またこれより

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}f(s) + \frac{m}{ms^2 + ds + k}\dot{z}(0) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k}z(0)$$

がえられる. ここで $1/(ms^2 + ds + k)$ は, 入力 f が出力 z に与える影響を, 同様に $(ms + d)/(ms^2 + ds + k)$ は, 初期条件 $z(0)$ が出力 z に与える影響を

あらわしている. これらをそれぞれ

$$\text{外力 } f \text{ から } z \text{ への伝達関数: } \frac{1}{ms^2 + ds + k}$$

$$\text{初期速度 } \dot{z}(0) \text{ から } z \text{ への伝達関数: } \frac{m}{ms^2 + ds + k}$$

$$\text{初期位置 } z(0) \text{ から } z \text{ への伝達関数: } \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k}$$

と呼ぶ. また伝達関数の分母は, 共通に $ms^2 + ds + k$ になっているが, これを

$$\text{伝達関数の分母多項式: } ms^2 + ds + k$$

と呼ぶ.

例題 3.19. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 3$, $k = 2$ の時の解:

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$z(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = 2 \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 相異なる実数根 ($s = -1, -2$) をもつ場合

□

例題 3.20. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 0$, $k = 4$ の時の解:

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$z(s) = \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s}{s + 2^2}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = \cos 2t$$

- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 虚数 (の共役) 根 ($s = \pm 2j$) をもつ場合

□

例題 3.21. $f(t) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = 1$ かつ $m = 1$, $d = 2$, $k = 5$ の時の解:

$$z(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} f(s) + \frac{ms + d}{ms^2 + ds + k} z(0) + \frac{m}{ms^2 + ds + k} \dot{z}(0)$$

各係数を代入して,

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

逆ラプラス変換により,

$$x(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

- $ms^2 + ds + k = 0$ が, 複素 (共役) 根 ($s = -1 \pm 2j$) をもつ場合

□

3.5 演習問題

演習問題 3.1. 例題 2.2 の RLC 回路を考える. 初期時刻を $t_0 = 0$ とし, 初期条件 $q(0)$ と $\dot{q}(0)$ の影響を考慮したラプラス変換を考える.

1. 入力 v から出力 q への伝達関数を求めなさい.
2. 初期条件 $\dot{q}(0)$ から出力 q への伝達関数を求めなさい.
3. 初期条件 $q(0)$ から出力 q への伝達関数を求めなさい.
4. $v(t) = 0, \dot{q}(0) = 0, q(0) = 2$ に対する出力 q を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 相異なる実数根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $q(t)$ を求めなさい.
5. $v(t) = 0, \dot{q}(0) = 0, q(0) = 2$ に対する出力 q を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 虚数 (の共役) 根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $q(t)$ を求めなさい.
6. $v(t) = 0, \dot{q}(0) = 0, q(0) = 2$ に対する出力 q を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 複素共役根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $q(t)$ を求めなさい.

演習問題 3.2. 例題 2.3 の剛体の回転運動を考える. 初期時刻を $t_0 = 0$ とし, 初期条件 $\theta(0)$ と $\dot{\theta}(0)$ の影響を考慮したラプラス変換を考える.

1. 入力 τ から出力 θ への伝達関数を求めなさい.
2. 初期条件 $\dot{\theta}(0)$ から出力 θ への伝達関数を求めなさい.
3. 初期条件 $\theta(0)$ から出力 θ への伝達関数を求めなさい.
4. $\tau(t) = 0, \dot{\theta}(0) = 1, \theta(0) = 0$ に対する出力 θ を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 相異なる実数根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $\theta(t)$ を求めなさい.
5. $\tau(t) = 0, \dot{\theta}(0) = 1, \theta(0) = 0$ に対する出力 θ を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 虚数 (の共役) 根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $\theta(t)$ を求めなさい.
6. $\tau(t) = 0, \dot{\theta}(0) = 1, \theta(0) = 0$ に対する出力 θ を考える. (分母多項式) $= 0$ の方程式が, 複素共役根を持つ適当な条件を設定し, この時の解 $\theta(t)$ を求めなさい.

3.6 演習問題 サンプル解答

演習問題サンプル解答 3.1. 微分方程式 $L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + (1/C)q(t) = v(t)$ の両辺をラプラス変換して,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + (1/C)q(t)] &= \mathcal{L}[v(t)] \\ L(s^2q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)) + R(sq(s) - q(0)) + (1/C)q(s) &= v(s) \\ (Ls^2 + Rs + (1/C))q(s) &= v(s) + Lsq(0) + L\dot{q}(0) + Rq(0) \\ q(s) &= \frac{1}{Ls^2 + Rs + (1/C)}v(s) \\ &\quad + \frac{L}{Ls^2 + Rs + (1/C)}\dot{q}(0) + \frac{Ls + R}{Ls^2 + Rs + (1/C)}q(0) \\ q(s) &= \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}v(s) \\ &\quad + \frac{LC}{LCs^2 + RCs + 1}\dot{q}(0) + \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}q(0)\end{aligned}$$

1. 入力 v から q への伝達関数:

$$\frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2. 初期条件 $\dot{q}(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

3. 初期条件 $q(0)$ から q への伝達関数:

$$\frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

4. 例えば $L = 1, R = 3, C = 1/2$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) = 0$ の根は $s = -1, -2$ となる. この時

$$\begin{aligned}q(s) &= \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}q(0) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}2 \\ &= \frac{4}{s + 1} - \frac{2}{s + 2}\end{aligned}$$

より $q(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}$.

5. 例えば $L = 1, R = 0, C = 1$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 1 = (s + j)(s - j) = 0$ の根は $s = \pm j$ となる. この時

$$q(s) = \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1}q(0) = \frac{s}{s^2 + 1}2$$

より $q(t) = 2 \cos t$.

6. 例えば $L = 1$, $R = 2$, $C = 1/2$ と設定すると $LCs^2 + RCs + 1 = 0$ より $s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1 = 0$ の根は $s = -1 \pm j$ となる. この時

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{LCs + RC}{LCs^2 + RCs + 1} q(0) = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 1} 2 \\ &= 2 \left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

より $q(t) = 2e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

演習問題サンプル解答 3.2.