

電気数学 III

Laplace 変換

Fourier 解析

Laplace 変換

電気数学 III

- * なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- * ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- * ラプラス変換の性質
- * ラプラス変換と微分方程式 1
- * ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験

Fourier 解析

電気数学 III

- * Fourier 級数
- * Fourier 変換
- * 離散 Fourier 変換
離散化と局所化
- * 離散時間 Fourier 変換
サンプリング定理とエイリアシング
- * 離散 Fourier 変換

01/30 期末試験

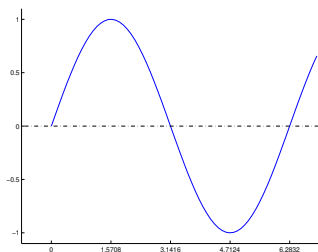
Laplace 変換

電気数学 III

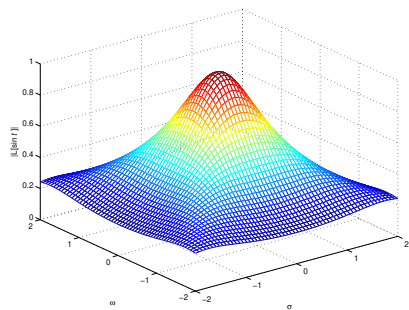
- * なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- * ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- * ラプラス変換の性質
- * ラプラス変換と微分方程式 1
- * ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験

なぜラプラス変換を考えるのか



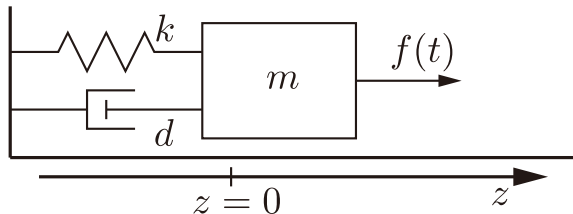
$\sin t$



$|\mathcal{L}[\sin t]|$

なぜラプラス変換を考えるのか

マス-バネ-ダンパ系



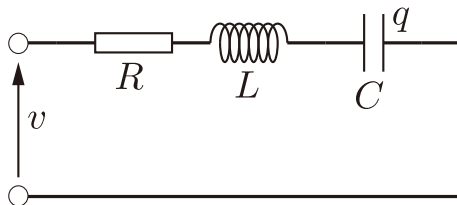
$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

記法: $x(t)$ $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ $\frac{d^nx(t)}{dt^n} = x^{(n)}(t)$

なぜラプラス変換を考えるのか

RLC 回路



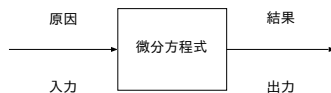
$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

- 加える電圧: $v(t)$ [V] 入力
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] 出力

なぜラプラス変換を考えるのか

さまざまな問題は、微分方程式で記述される

- 機械, 電気, 材料, 熱, 流体, 生物, 通信, 金融 などなど



Engineer は、微分方程式を解きたい

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0t}x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$

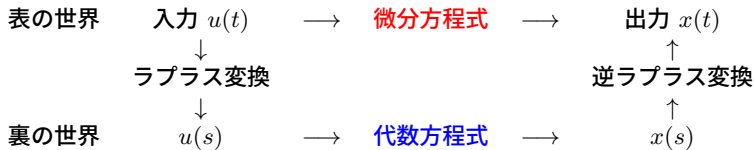
なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$



Laplace 変換

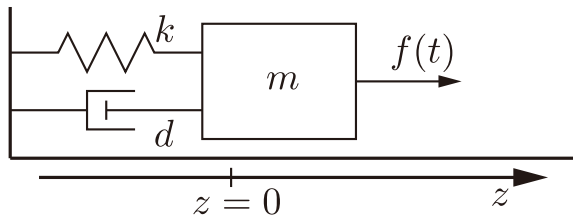
電気数学 III

- * なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- * ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- * ラプラス変換の性質
- * ラプラス変換と微分方程式 1
- * ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験

動的なシステムのモデリング

マス-バネ-ダンパ系

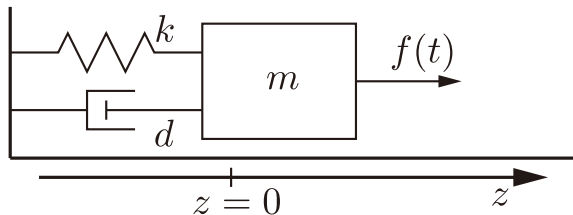


$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t)$$

- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)

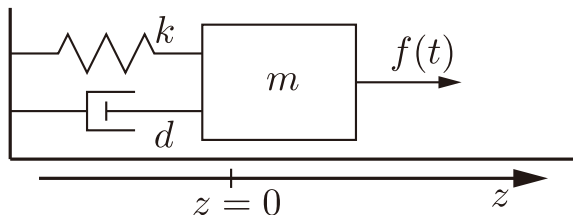
動的なシステムのモデリング

マス-バネ-ダンパ系



動的なシステムのモデリング

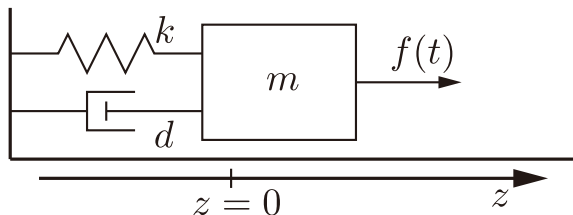
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]

動的なシステムのモデリング

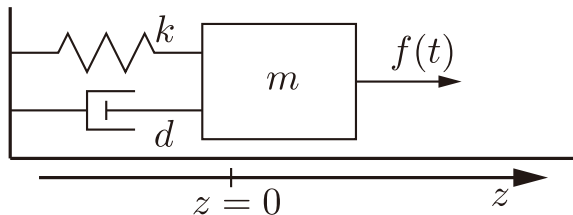
マス-バネ-ダンパ系



- 質点の質量: m [kg] バネ定数: k [N/m] ダンパ定数: d [Ns/m]
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N] 入力 (原因)
- 質点の位置: $z(t)$ [m] 出力 (結果)
- 初期時刻 $t = t_0$ で: $z(t_0) = z_0$ [m] $\dot{z}(t_0) = v_0$ [m/s]
- (質量) $\times$ (加速度) = (外から加わる力)

動的なシステムのモデリング

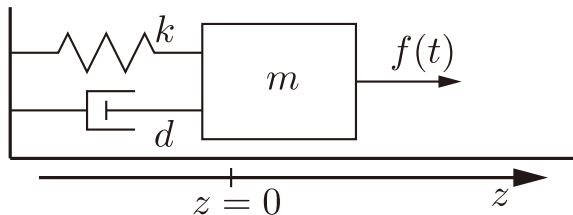
マス-バネ-ダンパ系



- (質量) $\times$ (加速度) = (外から加わる力)

動的なシステムのモデリング

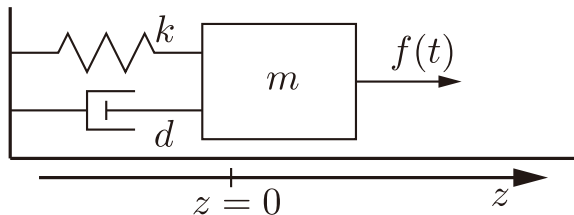
マス-バネ-ダンパ系



- (質量) $\times$ (加速度) = (外から加わる力)
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]
- バネ: 伸び $x(t)$ に比例した反力 $-kz(t)$ [N]
- ダンパ: 速度 $\dot{x}(t)$ に比例した反力 $-d\dot{z}(t)$ [N]

動的なシステムのモデリング

マス-バネ-ダンパ系

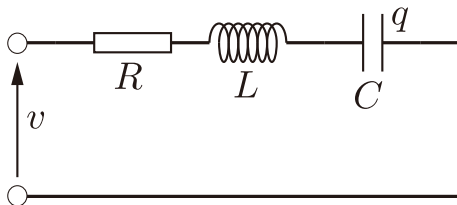


- (質量) $\times$ (加速度) = (外から加わる力)
- 外部から加わる力: $f(t)$ [N]
- バネ: 伸び $x(t)$ に比例した反力 $-kz(t)$ [N]
- ダンパ: 速度 $\dot{x}(t)$ に比例した反力 $-d\dot{z}(t)$ [N]

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = f(t) \quad z(t_0) = z_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0 \quad t \geq t_0$$

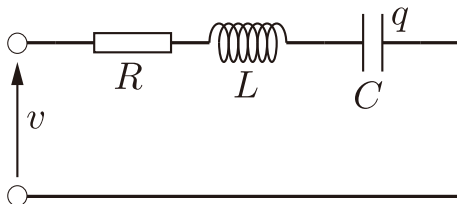
動的なシステムのモデリング

RLC 回路



動的なシステムのモデリング

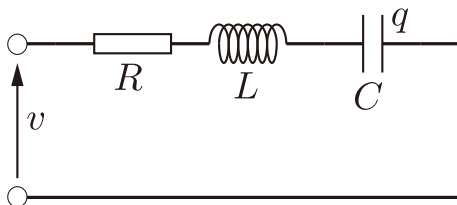
RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H] 抵抗の抵抗値: R [Ω] コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $q(t_0) = q_0$ [C] $\dot{q}(t_0) = 0$ [A]

動的なシステムのモデリング

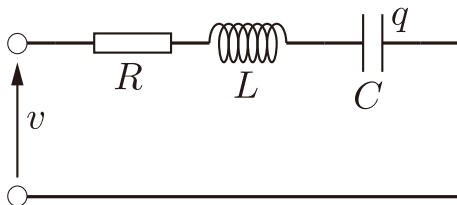
RLC 回路



- コイルのインダクタンス: L [H] 抵抗の抵抗値: R [Ω] コンデンサの静電容量: C [F]
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $q(t_0) = q_0$ [C] $\dot{q}(t_0) = 0$ [A]
- (入力電圧) = (電圧降下の和)

動的なシステムのモデリング

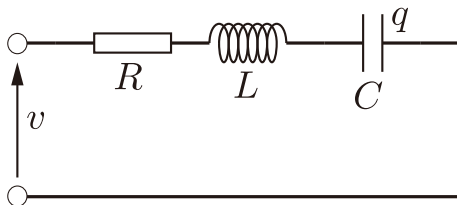
RLC 回路



- (入力電圧) = (電圧降下の和)

動的なシステムのモデリング

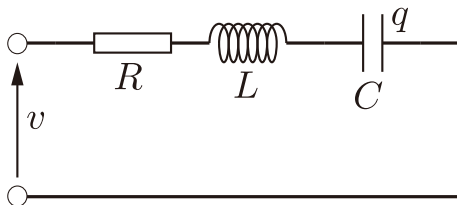
RLC 回路



- (入力電圧) = (電圧降下の和)
- 加える電圧: $v(t)$ [V]
- 抵抗: 電流 $i(t)$ に比例した電圧降下 $Ri(t)$
- コイル: 電流の変化率 $\dot{i}(t)$ に比例した電圧降下 $L\dot{i}(t)$
- コンデンサ: 蓄えられた電荷 $q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ に
比例した電圧降下 $\frac{1}{C}q(t)$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



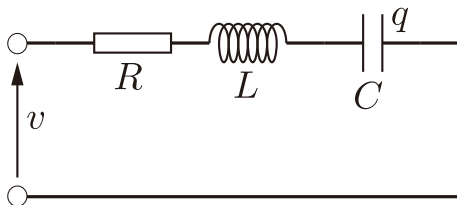
- (入力電圧) = (電圧降下の和)
- 加える電圧: $v(t)$ [V]
- 抵抗: 電流 $i(t)$ に比例した電圧降下 $Ri(t)$
- コイル: 電流の変化率 $\dot{i}(t)$ に比例した電圧降下 $L\dot{i}(t)$
- コンデンサ: 蓄えられた電荷 $q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ に

比例した電圧降下 $\frac{1}{C}q(t)$

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau = v(t)$$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



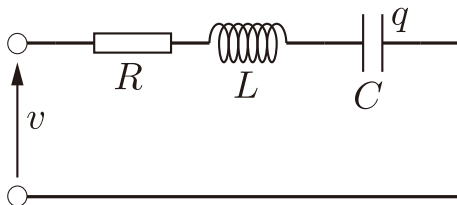
- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

動的なシステムのモデリング

RLC 回路



- 加える電圧: $v(t)$ [V] (入力)
- コンデンサに蓄えられる電荷: q [C] (出力)

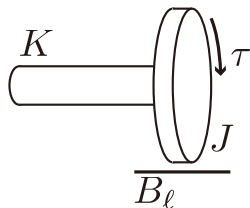
$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad \dot{q}(t) = i(t) \quad \ddot{q}(t) = \dot{i}(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \quad q(t_0) = q_0 \quad \dot{q}(t_0) = 0 \quad t \geq t_0$$

動的なシステムのモデリング

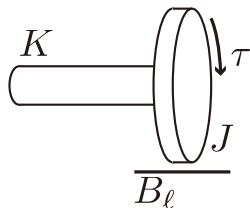
回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm] (入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad] $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない

動的なシステムのモデリング

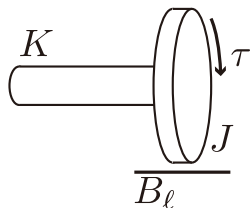
回転運動



- 慣性モーメント: J [kgm^2]
- 摩擦係数: B_ℓ [Nms/rad]
- バネ定数: K [Nm/rad]
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm] (入力)
- 回転体の回転角度: $\theta(t)$ [rad] (出力)
- 初期時刻 t_0 で: $\theta(t_0) = \theta_0$ [rad] $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ [rad/s]
- $\theta = 0$ ではバネのねじれはない
- (慣性モーメント) $\times$ (角加速度) = (外から加わるトルク)

動的なシステムのモデリング

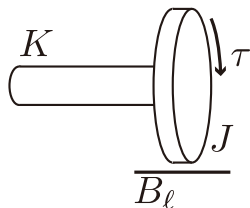
回転運動



- (慣性モーメント) $\times$ (角加速度) = (外から加わるトルク)

動的なシステムのモデリング

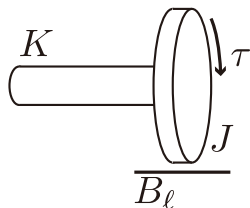
回転運動



- (慣性モーメント) $\times$ (角加速度) = (外から加わるトルク)
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm]
- バネ: ねじれ $\theta(t)$ に比例した反力 $-K\theta(t)$ [Nm]
- 摩擦: 角速度 $\dot{\theta}(t)$ に比例した反力 $-B_\ell\dot{\theta}(t)$ [Nm]

動的なシステムのモデリング

回転運動



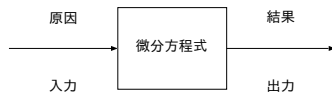
- (慣性モーメント) $\times$ (角加速度) = (外から加わるトルク)
- 外部から加わるトルク: $\tau(t)$ [Nm]
- バネ: ねじれ $\theta(t)$ に比例した反力 $-K\theta(t)$ [Nm]
- 摩擦: 角速度 $\dot{\theta}(t)$ に比例した反力 $-B_\ell\dot{\theta}(t)$ [Nm]

$$J\ddot{\theta}(t) + B_\ell\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = \tau(t) \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \quad t \geq t_0$$

なぜラプラス変換を考えるのか

さまざまな問題は、微分方程式で記述される

- 機械, 電気, 材料, 熱, 流体, 生物, 通信, 金融 などなど



Engineer は、微分方程式を解きたい

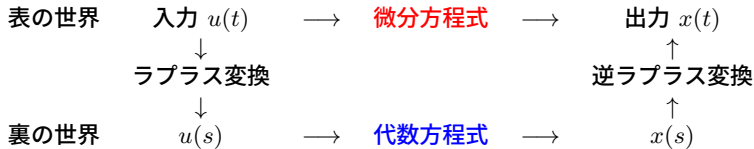
なぜラプラス変換を考えるのか

1 階定数係数線形常微分方程式: $\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$

$$x(t) = e^{-a_0 t} x(0) + \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

n 階定数係数線形常微分方程式:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t)$$



Laplace 変換

電気数学 III

- * なぜラプラス変換を考えるのか
動的なシステムのモデリング
- * ラプラス変換の定義
基本的な関数のラプラス変換
- * ラプラス変換の性質
- * ラプラス変換と微分方程式 1
- * ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験