電気数学 III

Laplace 変換　　Fourier 解析

Laplace 変換

電気数学 III

- * なぜラプラス変換を考えるのか
  動的なシステムのモデリング
- * ラプラス変換の定義
  基本的な関数のラプラス変換
- * ラプラス変換の性質
- * ラプラス変換と微分方程式 1
- * ラプラス変換と微分方程式 2
- 11/28 中間試験

ラプラス変換の性質

定 義: ラプラス変換
時間関数 $x(t)$, $t \geq 0$ (ただし $t < 0$ の時は $x(t) = 0$ とする) のラプラス変換をつぎで定義する.

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

$x(t)$: 時間関数　　$x(s)$: $x(t)$ のラプラス変換

s : 複素数 $s = \sigma + j\omega$

より正確には $\displaystyle \mathcal{L}_-[\, x(t) \,] = \int_{0-}^\infty x(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^\infty x(t) e^{-st} dt$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

線形性

$$\mathcal{L}[\, ax(t) + by(t)\,] = ax(s) + by(s)$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt}\,] = sx(s) - x(0)$$

部分積分:

$$\int_a^b f(x)\dot{g}(x)dx = [\, f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b \dot{f}(x)g(x)dx$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t)\,] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

時間微分

$$\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt}\,] = sx(s) - x(0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,] = \mathcal{L}[\, \frac{dy(t)}{dt}\,] &= sy(s) - y(0)\\ &= s(sx(s) - x(0)) - \dot{x}(0)\\ &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t)\,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \frac{dx(t)}{dt}\,] &= sx(s) - x(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,] &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^3x(t)}{dt^3}\,] &= s^3x(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) \\
\mathcal{L}[\, \frac{d^4x(t)}{dt^4}\,] &= s^4x(s) - s^3x(0) - s^2\dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - \dddot{x}(0) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\,x(t)\,] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)d\tau\,] = \frac{1}{s}x(s)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \qquad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \qquad y(0) = \int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

ラプラス変換の性質

$$x(s) = \mathcal{L}[\, x(t) \,] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

時間積分

$$\mathcal{L}[\, \int_0^t x(\tau) d\tau \,] = \frac{1}{s} x(s)$$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau \,] &= \mathcal{L}[\, \int_0^t y(\tau) d\tau \,] = \frac{1}{s} y(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\, \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 \,] \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{s} x(s) = \frac{1}{s^2} x(s) \end{aligned}$$

ラプラス変換の性質

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\, x(t) \,] &= x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t x(\tau) d\tau \,] &= \frac{1}{s} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^2} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} x(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^3} x(s) \\
\mathcal{L}[\, \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} x(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 d\tau \,] &= \frac{1}{s^4} x(s) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の性質

微 分: s をかけること

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

積 分: $\dfrac{1}{s}$ をかけること

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$$

$$\begin{array}{lccccc}
\text{表の世界} & \text{入力 } u(t) & \longrightarrow & \text{微分方程式} & \longrightarrow & \text{出力 } x(t) \\
 & \downarrow & & & & \uparrow \\
 & \text{ラプラス変換} & & & & \text{逆ラプラス変換} \\
 & \downarrow & & & & \uparrow \\
\text{裏の世界} & U(s) & \longrightarrow & \text{代数方程式} & \longrightarrow & x(s)
\end{array}$$

ラプラス変換の性質

時間領域推移

$$\mathcal{L}[\,x(t-\tau)\,] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[\,x(t)\,]$$

ラプラス変換の性質

時間領域推移

$$\mathcal{L}[\,x(t-\tau)\,] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[\,x(t)\,]$$

s 領域推移

$$\mathcal{L}[\,e^{-at}x(t)\,] = X(s+a)$$

ラプラス変換の性質

時間領域推移

$$\mathcal{L}[\, x(t-\tau)\,] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[\, x(t)\,]$$

s 領域推移

$$\mathcal{L}[\, e^{-at}x(t)\,] = X(s+a)$$

時間スケーリング

$$\mathcal{L}[\, x(at)\,] = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$$

ラプラス変換の性質

s 領域での微分

$$\mathcal{L}[\,-tx(t)\,] = \frac{d}{ds}X(s)$$

ラプラス変換の性質

s 領域での微分

$$\mathcal{L}[\,-tx(t)\,] = \frac{d}{ds}X(s)$$

畳み込み積分

$$\mathcal{L}[\,\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau\,] = \mathcal{L}[\,x(t)\,]\mathcal{L}[\,y(t)\,]$$

ラプラス変換の性質

最終値の定理

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

ラプラス変換の性質

最終値の定理

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

初期値の定理

$$x(0+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Laplace 変換

電気数学 III

- ＊ なぜラプラス変換を考えるのか
  動的なシステムのモデリング
- ＊ ラプラス変換の定義
  基本的な関数のラプラス変換
- ＊ ラプラス変換の性質
- ＊ ラプラス変換と微分方程式 1
- ＊ ラプラス変換と微分方程式 2
- 11/28 中間試験