

# 電気数学 III

Laplace 変換

Fourier 解析

# Laplace 変換

## 電気数学 III

- \* なぜラプラス変換を考えるのか  
動的なシステムのモデリング
- \* ラプラス変換の定義  
基本的な関数のラプラス変換
- \* ラプラス変換の性質
- \* ラプラス変換と微分方程式 1
- \* ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験

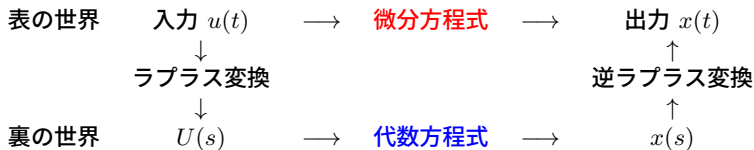
# ラプラス変換と微分方程式

**微分:**  $s$  をかけること

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sx(s) - x(0)$$

**積分:**  $\frac{1}{s}$  をかけること

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}x(s)$$



# ラプラス変換と微分方程式

**例題 1.**  $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 3$  の解を求める.

$$x(s) = 3 \frac{1}{s+2} \qquad x(t) = 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

# ラプラス変換と微分方程式

例題 2.  $\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$ ,  $x(0) = 3$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{3s + 1}{s(s + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s + 2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0)$$

ステップ関数  $u(t)$  :  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$

$$\frac{3s + 1}{s(s + 2)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + 2}$$

# ラプラス変換と微分方程式

**例題 3.**  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = 4\frac{1}{s+1} - 3\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{s+2}$$

# ラプラス変換と微分方程式

例題 4.  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$ ,  $\dot{x}(0) = 2$ ,  $x(0) = 1$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s+1} - \frac{5}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\text{ステップ関数 } u(t) : \quad \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s+1} + C \frac{1}{s+2}$$

# ラプラス変換と微分方程式

例題 5.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0, \dot{x}(0) = 3, x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = e^{-t} + 4te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad \mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)^2} = A\frac{1}{s+1} + B\frac{1}{(s+1)^2}$$



# ラプラス変換と微分方程式

例題 6.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = u(t), \dot{x}(0) = 3, x(0) = 1$

$$x(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + 3\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = u(t) + 3te^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

ステップ関数  $u(t)$  :  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad \mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^2} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1} + C\frac{1}{(s+1)^2}$$

# ラプラス変換と微分方程式

**例題 7.**  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -1$ ,  $x(0) = 1$  の解を求める.

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$$

$$x(t) = e^{-t} \cos 3t$$

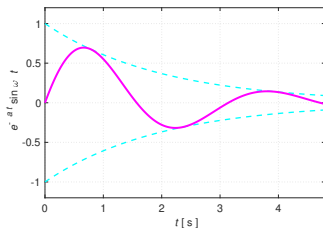
$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

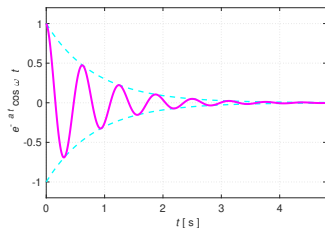
$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-at} \sin \omega t \quad e^{-at} \cos \omega t$$

ラプラス変換と微分方程式



a  $e^{-at} \sin \omega t$ ,  $a = 0.5$ ,  $\omega = 2$



b  $e^{-at} \cos \omega t$ ,  $a = 1.2$ ,  $\omega = 10$

# Laplace 変換

## 電気数学 III

- \* なぜラプラス変換を考えるのか  
動的なシステムのモデリング
- \* ラプラス変換の定義  
基本的な関数のラプラス変換
- \* ラプラス変換の性質
- \* ラプラス変換と微分方程式 1
- \* ラプラス変換と微分方程式 2

11/28 中間試験