

電気数学 III

Laplace 変換

Fourier 解析

Fourier 解析

電気数学 III

- * Fourier 級数
- * Fourier 変換
- * 離散 Fourier 変換
離散化と局所化
- * 離散時間 Fourier 変換
サンプリング定理とエイリアシング
- * 離散 Fourier 変換

01/30 期末試験

級数展開

Fourier 級数

Taylor 級数展開

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{1!} \dot{f}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{f}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{f}(t_0)(t - t_0)^3 + \cdots$$

級数展開

Fourier 級数

Taylor 級数展開

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{1!} \dot{f}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{f}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{f}(t_0)(t - t_0)^3 + \dots$$

Taylor 級数展開 ($t_0 = 0$)

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!} \dot{f}(0)t + \frac{1}{2!} \ddot{f}(0)t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{f}(0)t^3 + \dots$$

級数展開

Fourier 級数

Taylor 級数展開

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{1!} \dot{f}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{f}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{f}(t_0)(t - t_0)^3 + \dots$$

Taylor 級数展開 ($t_0 = 0$)

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!} \dot{f}(0)t + \frac{1}{2!} \ddot{f}(0)t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{f}(0)t^3 + \dots$$

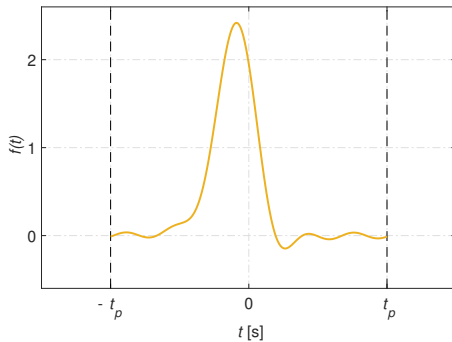
$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

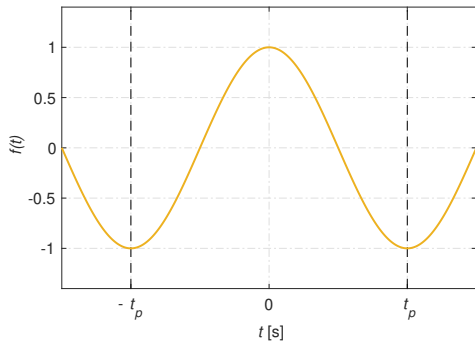
$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Fourier 級数

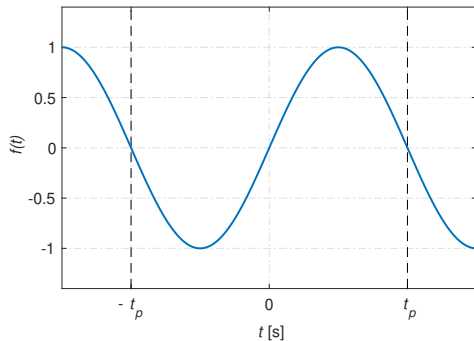
区間 $[-t_p, t_p)$ で定義された関数 $f(t)$



Fourier 級数

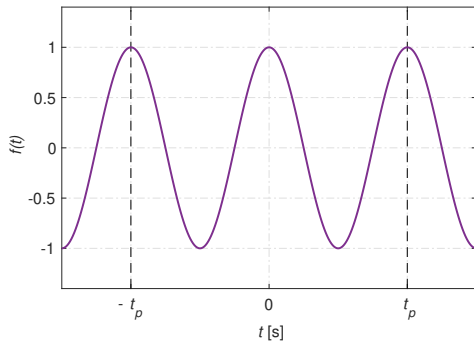


a 区間 $[-t_p, t_p)$ を 1 周期とする $\cos \pi \frac{1}{t_p} t$

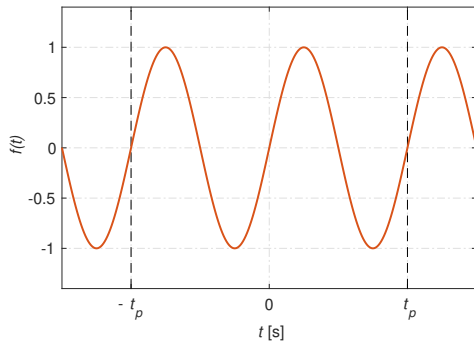


b 区間 $[-t_p, t_p)$ を 1 周期とする $\sin \pi \frac{1}{t_p} t$

Fourier 級数

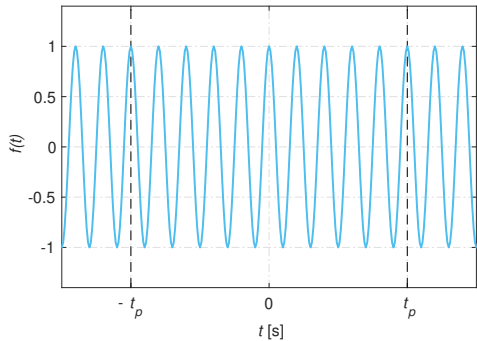


a 区間 $[-t_p, t_p)$ を 2 周期とする $\cos \pi \frac{2}{t_p} t$

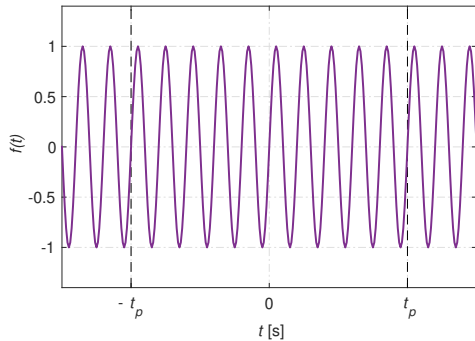


b 区間 $[-t_p, t_p)$ を 2 周期とする $\sin \pi \frac{2}{t_p} t$

Fourier 級数



a 区間 $[-t_p, t_p)$ を n 周期とする $\cos \pi \frac{n}{t_p} t$



b 区間 $[-t_p, t_p)$ を n 周期とする $\sin \pi \frac{n}{t_p} t$

Fourier 級数

$$f(t)$$

Fourier 級数

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \pi \frac{1}{t_p} t + b_1 \sin \pi \frac{1}{t_p} t \\ & + a_2 \cos \pi \frac{2}{t_p} t + b_2 \sin \pi \frac{2}{t_p} t \\ & + a_3 \cos \pi \frac{3}{t_p} t + b_3 \sin \pi \frac{3}{t_p} t \\ & + \cdots \\ & + a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Fourier 級数

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \pi \frac{1}{t_p} t + b_1 \sin \pi \frac{1}{t_p} t \\ & + a_2 \cos \pi \frac{2}{t_p} t + b_2 \sin \pi \frac{2}{t_p} t \\ & + a_3 \cos \pi \frac{3}{t_p} t + b_3 \sin \pi \frac{3}{t_p} t \\ & + \cdots \\ & + a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Fourier 級数

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \pi \frac{1}{t_p} t + b_1 \sin \pi \frac{1}{t_p} t \\ & + a_2 \cos \pi \frac{2}{t_p} t + b_2 \sin \pi \frac{2}{t_p} t \\ & + a_3 \cos \pi \frac{3}{t_p} t + b_3 \sin \pi \frac{3}{t_p} t \\ & + \cdots \\ & + a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Fourier 級数展開

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \quad t \in [-t_p, t_p)$$

Fourier 級数

実際に関数 $f(t)$ が Fourier 級数により表現可能な条件は:

のように知られている

Fourier 級数

実際に関数 $f(t)$ が Fourier 級数により表現可能な条件は:

- Dirichlet–Jordan の定理

関数 $f(t)$ は, ある t の近傍で有界変動とする. このとき $f(t)$ の Fourier 級数展開は右極限と左極限の平均に収束する:

$$\frac{1}{2}(f(t+0)) + f(t-0))$$

のように知られている

Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \quad t \in [-t_p, t_p)$$

Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \quad t \in [-t_p, t_p)$$

Fourier 級数展開は, 明らかに周期 $2t_p$ の周期関数

Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \quad t \in [-t_p, t_p)$$

Fourier 級数展開は, 明らかに周期 $2t_p$ の周期関数

関数 $f(t)$, $t \in [-t_p, t_p)$ あるいはこれを周期接続した関数 $f(t + 2t_p) = f(t)$ の Fourier 級数展開

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \quad t \in (-\infty, \infty)$$

複素 Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

複素 Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{Euler の公式}$$

複素 Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{Euler の公式}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

複素 Fourier 級数

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{Euler の公式}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

$$\begin{aligned} a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t &= (c_n + c_{-n}) \cos \pi \frac{n}{t_p} t + j(c_n - c_{-n}) \sin \pi \frac{n}{t_p} t \\ &= c_n \left(\cos \pi \frac{n}{t_p} t + j \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) \\ &\quad + c_{-n} \left(\cos \pi \frac{n}{t_p} t - j \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right) = c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t} + c_{-n} e^{j\pi \frac{-n}{t_p} t} \end{aligned}$$

複素 Fourier 級数

Fourier 級数展開

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

複素 Fourier 級数展開

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

正規直交性:

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

正規直交性:

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} e^{-j\pi \frac{m}{t_p} \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n-m}{t_p} \tau} d\tau \end{aligned}$$

Fourier 係数の計算

$n \neq m$ の場合

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n-m}{t_p} \tau} d\tau \\&= \frac{1}{2t_p} \left[\frac{t_p}{j\pi(n-m)} e^{j\pi \frac{n-m}{t_p} \tau} \right]_{-t_p}^{t_p} \\&= \frac{1}{2t_p} \frac{t_p}{j\pi(n-m)} \left(e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)} \right) \\&= \frac{1}{2t_p} \frac{t_p}{j\pi(n-m)} (-1 - (-1)) = 0\end{aligned}$$

Fourier 係数の計算

$n = m$ の場合

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n-m}{t_p} \tau} d\tau \\&= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{0}{t_p} \tau} d\tau = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} 1 d\tau = \frac{1}{2t_p} [\tau]_{-t_p}^{t_p} \\&= \frac{1}{2t_p} (t_p - (-t_p)) = \frac{1}{2t_p} 2t_p = 1\end{aligned}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Fourier 級数展開の両辺に $\overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} t}}$ を掛けて:

$$f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}}$$

Fourier 係数の計算

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{m}{t_p} \tau}} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Fourier 級数展開の両辺に $\overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} t}}$ を掛けて:

$$f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}}$$

区間 $[-t_p, t_p)$ で積分し, $\frac{1}{2t_p}$ を掛ける:

$$\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau$$

Fourier 係数の計算

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau \\&= \cdots + 0 + \cdots + 0 + c_k + 0 + \cdots = c_k\end{aligned}$$

Fourier 係数の計算

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau &= \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau} \overline{e^{j\pi \frac{k}{t_p} \tau}} d\tau \\&= \cdots + 0 + \cdots + 0 + c_k + 0 + \cdots = c_k\end{aligned}$$

Fourier 係数 c_n の計算:

$$c_n = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \overline{e^{j\pi \frac{n}{t_p} \tau}} d\tau = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau$$

Fourier 係数の計算

$$c_n = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau$$

Fourier 係数の計算

$$c_n = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau$$

Fourier 係数 c_{-n} :

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Fourier 係数の計算

$$c_n = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau$$

Fourier 係数 c_{-n} :

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Fourier 係数 a_n, b_n :

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2\operatorname{Re}[c_n] \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2\operatorname{Im}[c_n]$$

Fourier 係数の計算

Fourier 係数 a_n の計算:

$$\begin{aligned} a_n &= 2\text{Re}[c_n] = 2\text{Re}\left[\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau\right] \\ &= \frac{1}{t_p} \text{Re}\left[\int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \left(\cos\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right) + j \sin\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right)\right) d\tau\right] \\ &= \frac{1}{t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \cos\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right) d\tau \end{aligned}$$

Fourier 係数 b_n の計算:

$$\begin{aligned} b_n &= -2\text{Im}[c_n] = -2\text{Im}\left[\frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau\right] \\ &= -\frac{1}{t_p} \text{Im}\left[\int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \left(\cos\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right) + j \sin\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right)\right) d\tau\right] \\ &= -\frac{1}{t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \sin\left(-\pi \frac{n}{t_p} \tau\right) d\tau \end{aligned}$$

Fourier 級数

複素 Fourier 級数展開と Fourier 係数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi \frac{n}{t_p} t}$$

$$c_n = \frac{1}{2t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) e^{-j\pi \frac{n}{t_p} \tau} d\tau$$

Fourier 級数展開と Fourier 係数

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi \frac{n}{t_p} t + b_n \sin \pi \frac{n}{t_p} t \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) d\tau$$

$$a_n = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \cos \pi \frac{n}{t_p} \tau d\tau$$

$$b_n = \frac{1}{t_p} \int_{-t_p}^{t_p} f(\tau) \sin \pi \frac{n}{t_p} \tau d\tau$$

Fourier 解析

電気数学 III

- * Fourier 級数
- * Fourier 変換
- * 離散 Fourier 変換
離散化と局所化
- * 離散時間 Fourier 変換
サンプリング定理とエイリアシング
- * 離散 Fourier 変換

01/30 期末試験