弾性衝突とエネルギー保存の原理を用いたボールとバットの衝撃相互作用および3次元軌道モデリング

○味岡晃生　Nguyen Tam　平田研二　（富山大学）

Modeling of the 3D Trajectory and Shock Interaction of a Ball-Batt System Using the Elastic-Collision and Energy-Conservation Principles

∗Kousei Ajioka, Nguyen Tam, Kenji Hirata (University of Toyama)

Abstract: In this paper, the trajectory of the ball from the pitcher's throw to the batter's strike is modeled in three-dimensional space. For the pitching, Newton's second law, drag force due to air resistance, and lift force due to rotation are considered. Concerning the bat trajectory of the batter's swing, the bat attitude is determined by using a rotation matrix. For the collision between the ball and the bat, elastic collision and the principle of conservation of energy are used to derive the equation for the trajectory of the ball after the collision. Simulations are carried out to validate the realism of the ball trajectory.

Keywords: Elastic-Collision, Energy-Conservation Principles, Simulation

1　はじめに

近年，スポーツ業界はITの導入や解析による新しい知識の確立により，勝つためにますます複雑化してきている．選手の指導はどのスポーツにおいても非常に重要であるが，監督やコーチの指導だけでは不十分になりつつある．そのため，選手の育成を担う機械の開発が求められている．

野球業界では，その機械の一つとしてピッチングマシンが作られた．ピッチングマシンは投手の代わりに自動的に投球を行う機械であり，打撃練習の際に用いられる．プロ野球は勿論，アマチュア野球や学校の部活動，さらにはバッティングセンターなどの娯楽施設にまで導入されている．スポーツ業界で機械化が進む中で，野球業界でもピッチングマシンの需要は増加していくと予測される．これから複雑化していく野球業界の中で選手が成長していくためには，さらに高性能な機械の開発が求められる．

これまでのピッチングマシンは使用者が球速や球種などを逐一設定するような設計がされていた．ピッチングマシンに関する研究 [1, 2] もされてきたが，ボールの縫い目を考慮したローラの設計による投球精度の向上に関する研究など投手のシステムしか考えられていない．しかし，今後は打者とピッチングマシンの相乗効果が期待される．例えば，打撃の様子をカメラで撮影しスイングやボール軌道を分析することで，打者は弱点を見つけることができる．人工知能によってその能力を高めることで，打者は弱点を克服し能力を向上させる可能性がある．また，ピッチングマシンは自身の失敗を学習することで，自らの投球する能力を向上させることができるようになる．そのような背景の中で，投手 · 打者システム全体のモデル化が提案できることは重要である．

一方で，野球におけるボール軌道の研究に関しては様々な研究 [3]-[6] がなされている．空力特性に関する実験的な研究 [7] や，有限要素法を用いたシミュレーションモデルと実験で測定した値による打球の比較する研究 [8] や，軟式野球ボールとバットの衝突シミュレーションを有限要素法を用いて解析した研究 [9]，インパクト時のボール位置とバット角度の関係を実験的に求めて，投球コースの違いがバットスイングに及ぼす影響を解析する研究 [10] などがあるが，3次元空間における投球から衝突後のボール軌道の一貫したシステムに関する研究は少ない．そのような中で，バッターとインパクト位置との3次元位置関係を実験に基づき定式化することにより投球からバッティングまでのボール飛跡を連続してシュミレートする3次元解析システムを解析した研究 [11] がある．3次元空間であり，投球から衝突後まで一貫しているシステムであるが実測した値を定式化して用いているため，あらゆる衝突には対応できず完璧なモデルではない．

そこで，本研究ではボールとバットの衝突現象は弾性衝突，エネルギー保存の原理を用いて解析的にモデル化することで全ての衝突に対応できるシステムを構築する．さらに，解析的な投手およびバッティングを一貫したモデルを提案することにより既存の研究に対して貢献できる．

2　投手が投げるボール軌道のモデル化

本章では，投手が投げるボール軌道のモデル化をしていく．まず，一般的なニュートンの第二法則から3次

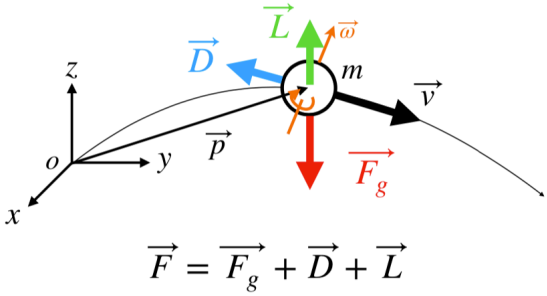


Fig. 1: Drag force $\vec{D}$, lift force $\vec{L}$ and gravity force $\vec{F_g}$ applied to the ball.

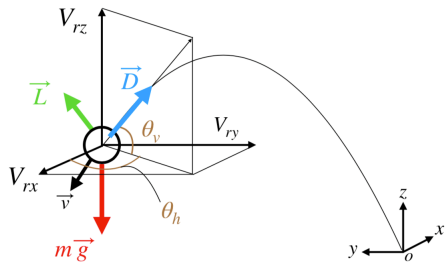


Fig. 2: Drag force and lift force applied to the ball.

元空間での運動方程式を立てる．さらにボールの回転による影響を考慮することでボール軌道のモデル化を完成させる．

2.1　3 次元空間におけるボールの運動方程式

Fig.1 の質量 $m \in \mathbb{R}_{>0}$，位置 $\vec{p} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$，力 $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ を受けるボールを考える．Fig.1 のようにボールに作用する力を重力と空気抵抗による抗力と回転による揚力に分解してニュートンの第二法則を用いることにより，このボールの運動方程式は

$$m\ddot{\vec{p}} = \vec{F} \tag{1}$$
$$\vec{F} = \vec{F_g} + \vec{D} + \vec{L} \tag{2}$$

となる．ここで，抗力 $\vec{D} = D\,[D_x\, D_y\, D_z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$，揚力 $\vec{L} = L\,[C_x\, C_y\, C_z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ として，$D = \|\vec{D}\|$ と $L = \|\vec{L}\|$ はそれぞれの絶対値である．

Fig.1 のように気体中を移動するボールには，気体による抗力という力が働く．抗力の向きはボールの進行方向とは逆向きになる．抗力の絶対値は，

$$D = \frac{1}{2} C_d \rho S |\vec{\mathrm{V}_{\mathrm{r}}}|^2 \tag{3}$$

で与えられる．ここで，抗力 $D > 0\,(\mathrm{N})$，抗力係数 $C_d > 0$，空気密度 $\rho > 0\,(\mathrm{kg/m^3})$，ボールの直径 $d > 0(\mathrm{m})$，ボールの断面積 $S = (\frac{d}{2})^2 \pi > 0\,(\mathrm{m^2})$，ボールに対する相対風速 $\vec{\mathrm{V}_{\mathrm{r}}} \in \mathbb{R}^3\,(\mathrm{m/s})$ とする．

ボールに回転を加えることによって，進行方向に垂直な方向に揚力という力が働く．揚力の向きは，速度ベクトルを $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$，角速度ベクトルを $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ とすると，$\vec{\omega} \times \vec{v}$ の向きである．回転軸ベクトルに対して垂直なベクトルを $\vec{b}$ と定義すると揚力の絶対値は，

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho S |\vec{b}|^2 \tag{4}$$

で与えられる．$\vec{b}$ に関しては後述する．C_d，C_L は実験で測定した値から定式化して用いる [11] ことで次のようになる．

$$C_d = -0.4288 S_p^2 + 1.0002 S_p \tag{5}$$
$$C_L = 0.188 S_p^2 + 0.1258 S_p + 0.3679 \tag{6}$$

ここで，$Sp = \frac{\pi d N}{|\vec{\mathrm{V}_{\mathrm{r}}}|} > 0$ はスピンパラメータであり，$d = 0.073\,(\mathrm{m})$，ボール回転数 $N > 0\,(\mathrm{rps})$ とする．

2.2　抗力と揚力の計算

Fig.2 のようにボールに対する相対風速ベクトルを $\vec{V_r} = [V_{rx}\, V_{ry}\, V_{rz}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ とし，

$$\theta_h = \arctan 2\,(V_{ry}, V_{rx}) \in [0\,, 2\pi] \tag{7}$$
$$\theta_v = \arctan 2\left(V_{rz}, \sqrt{{V_{rx}}^2 + {V_{ry}}^2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{8}$$

とすると

$$\ddot{\vec{p}} = \left[\frac{dV_{rx}}{dt}\ \frac{dV_{ry}}{dt}\ \frac{dV_{rz}}{dt}\right]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$D_x = -\cos\theta_v \cos\theta_h \tag{10}$$
$$D_y = -\cos\theta_v \sin\theta_h \tag{11}$$
$$D_z = -\sin\theta_v \tag{12}$$

となる．また，

$$\vec{F_g} = -mg \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$
$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2} \tag{14}$$

$\vec{F} = [F_x\, F_y\, F_z]^{\mathrm{T}}$, $\vec{L} = [L_x\, L_y\, L_z]^{\mathrm{T}}$ とすると x, y, z 方向に働く力は式 (2), (10)-(13) より，

$$F_x = -D\cos\theta_v \cos\theta_h + L_x \tag{15}$$
$$F_y = -D\cos\theta_v \sin\theta_h + L_y \tag{16}$$
$$F_z = -D\sin\theta_v - mg + L_z \tag{17}$$

となる．$\vec{L}$ はボールの回転により生じるものであり，成分は回転軸に依存するので、次の手順で求める．

ボールの回転軸の単位ベクトルを $\vec{R} = [R_x R_y R_z]^{\mathrm{T}} = \vec{\omega}/|\omega|$ とし，

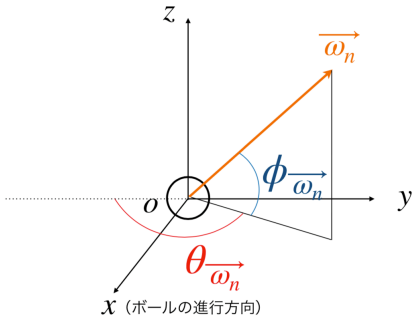


Fig. 3: Rotation axis $\vec{R}$ and relative velocity $\vec{V_r}$ of the ball.

$\overrightarrow{R}$ と $\overrightarrow{V_r}$ のなす角を θ とすると，ベクトルの内積より

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{R})}{|\overrightarrow{V_r}||\overrightarrow{R}|} \tag{18}$$

となる．また，$|\overrightarrow{R}| = 0$ の場合，$\overrightarrow{L} = [0\,0\,0]^{\mathrm{T}}$ になる．次に，

$$\vec{a} = [a_x\, a_y\, a_z]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

$$= \left[|\overrightarrow{V_r}|\cos\theta\cdot R_x\ |\overrightarrow{V_r}|\cos\theta\cdot R_y\ |\overrightarrow{V_r}|\cos\theta\cdot R_z\right]^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

とする．回転軸ベクトルに対して垂直なベクトル $\vec{b}$ は

$$\vec{b} = \overrightarrow{V_r} - \vec{a} = [V_{rx} - a_x\, V_{ry} - a_y\, V_{rz} - a_z]^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

となり，ボールに生じる揚力の単位方向ベクトル $\vec{C}$ は，

$$\overrightarrow{C} = \frac{\overrightarrow{V_r}\times\overrightarrow{R}}{|\overrightarrow{V_r}||\overrightarrow{R}|} = [C_x\, C_y\, C_z]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

となる．次にシミュレーションを行い，様々なパラメータを変更してボール軌道を解析する．

2.3 シミュレーション

$\overrightarrow{R}$ と初速度 $v_0 \in \mathbb{R}^3$ をパラメータとして変更し，MATLAB によるシミュレーションにより結果を解析する．Fig.4 のように投手が投げた瞬間の速度を v_0，そして，$\overrightarrow{v_0}$ の方向を決める角度を仰俯角 θ_{v_0} と方位角 ϕ_{v_0} と定義し，$\theta_{v_0} = 2.5°$，$\phi_{v_0} = 0°$ とした．またボールの初期位置である投手のリリースポイントは $h = 1.8\,\mathrm{m}$，$l_{frnt} = 1.88\,\mathrm{m}$ とする．ここで，ボールの回転軸 $\overrightarrow{\omega_n} = \overrightarrow{R}$ を決定するために，Fig.5 のような $\theta_{\overrightarrow{\omega_n}}$ と $\phi_{\overrightarrow{\omega_n}}$ を定義する．

実際の野球のストレートと変化球（スライダー，カーブ）の回転軸を参照して $\theta_{\overrightarrow{\omega_n}}$ と $\phi_{\overrightarrow{\omega_n}}$ を定めた [12]．Table 2 のようにそれぞれの球種に対して，初速 v_0 を 100 km/h，120 km/h，140 km/h と変化させて軌道を比較した．

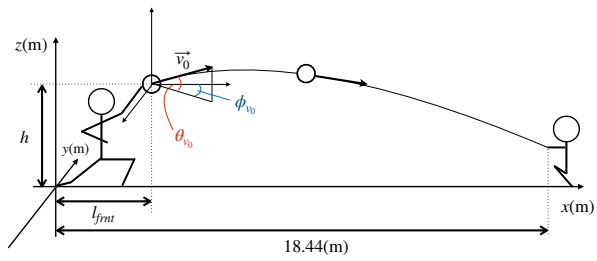


Fig. 4: Coordinate system of pitcher and batter in three dimensions.

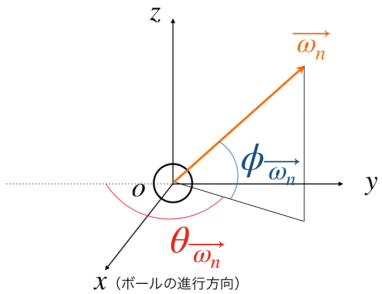


Fig. 5: $\theta_{\vec{\omega}}$ and $\phi_{\vec{\omega}}$ to determine the axis of rotation.

2.4 結果

6a のストレートは，y 軸方向に-0.3 m から-0.25 m ほど変化した．これにより，実際のストレートはバックスピンではないことから，回転による揚力が y 軸の負の方向に働くことで，ボール軌道も y 軸の負の方向に大きく逸れた．

6b のスライダーは y 軸方向に 0.05 m ほどの変化だった．スライダーの回転軸だと揚力があまり y 軸方向に作用しないため，横の変化はわずかであった．また，ストレートと比較すると，z 軸の正の方向の揚力が働いていないため，ボール軌道は早めに下降した．

6c のカーブは，y 方向に 0.2 m 前後変化した．スライダーよりも揚力が y 軸の正の方向に大きく作用することで，変化量も増えた．また，6a，6b と比較すると揚力の z 軸の負の方向に働く成分が大きいため，ボール軌道は最も早く下降した．

回転によって生まれる力である揚力と空気抵抗による力の抗力を考慮することによって，より正確な 3 次元空間でのボール軌道モデルが完成した．

3 打者のスイング軌道のモデル化

本章では，打者のスイング軌道のモデル化をしていく．スイング軌道におけるバットの姿勢を決定するた

Table 1: $\theta_{\vec{\omega}_n}$ and $\phi_{\vec{\omega}_n}$ at each change of pitch.

	ストレート	スライダー	カーブ
$\theta_{\overrightarrow{\omega_n}}(^\circ)$	27	98	140
$\phi_{\overrightarrow{\omega_n}}(^\circ)$	-32	19	30

Table 2: Three parameters $\theta_{\vec{\omega}_n}$, $\phi_{\vec{\omega}_n}$ and v_0.

parameters	case1			case2			case3		
$\theta_{\overrightarrow{\omega_n}}(^\circ)$	27			98			140		
$\phi_{\overrightarrow{\omega_n}}(^\circ)$	-32			19			30		
v_0(km/h)	100	120	140	100	120	140	100	120	140

めに回転行列を導入する．その回転行列を用いて微分方程式よりバット軌道を計算し，MATLAB によるシミュレーションにより解析する．

3.1 バットの姿勢

まずは，バットの姿勢について考える．姿勢を考えるにあたって回転行列 $R \in \mathrm{SO}(3)$ を導入する．SO(3) に属するということは

$$R^{-1} = R^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

の式で表される直交行列であるということと，

$$\det R = 1 \tag{24}$$

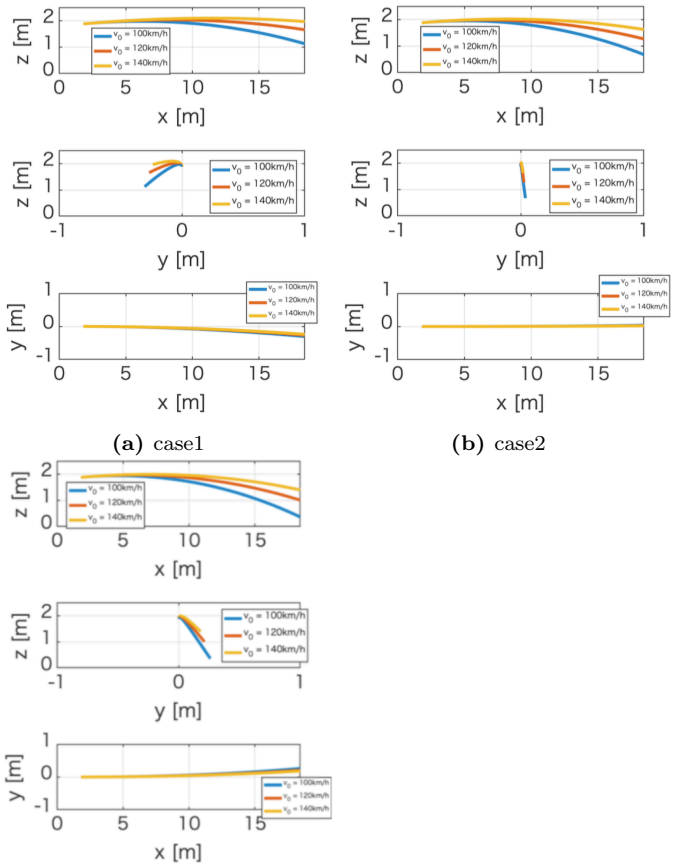
の式で表される行列式が単一であることの 2 つの条件を満たすことを示している．Fig. 7 のようにオイラー角を考える．オイラー角については y 軸上にあるバットの z 軸周りの回転軸を θ_{bat}，回転した後の x' 軸に対する回転角を ϕ_{bat}，さらに回転した後の y'' 軸周りの回転角を ψ_{bat} とする．しかし，バットの密度は一様に分布し y'' 軸に対して対象であるため，ψ_{bat} を省略する．よって，y 軸上にあるバットの姿勢は偏角 θ_{bat}，ϕ_{bat} を用いて

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta_{bat} & -\sin\theta_{bat} & 0 \\ \sin\theta_{bat} & \cos\theta_{bat} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_{bat} & -\sin\phi_{bat} \\ 0 & \sin\phi_{bat} & \cos\phi_{bat} \end{bmatrix} \tag{25}$$

と表される．式 (25) を用いることでバットを任意の初期姿勢に決定することができる．

3.2 バット軌道の式

次に，バットの回転軸と角速度を決定するために $\vec{\omega} = [\omega_x\, \omega_y\, \omega_z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ を定義する．ここで ω_x と ω_y と ω_z はそれぞれ基準座標系で表現されている．この $\vec{\omega}$ の絶対値 $|\vec{\omega}|$ はバットのスイングの角速度を表し，方向はバットの回転軸を表している．式 (25) より，バットの初期姿勢を $R(0)$ とする．初期姿勢 $R(0)$ が与えられた



(a) case1 **(b)** case2

(c) case3

Fig. 6: Comparison of three-dimensional ball trajectories.

とき，全ての時間 $t \geq 0$ に対して，回転運動の微分方程式は次の式になる．

$$\dot{R}(t) = \mathrm{skew}(\vec{\omega})R(t) \tag{26}$$

$\dot{R}(t)$ の積分が全ての t に対して SO(3) に属するために

$$\mathrm{skew}(\vec{\omega}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

と定義する．また，$\vec{\omega}$ は，

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \times [\cos(\phi_{rot})\cos(\theta_{rot})\ \ \cos(\phi_{rot})\sin(\theta_{rot})\ \ \sin(\phi_{rot})]^{\mathrm{T}}$$

の式で表されるため，Fig.8 のように偏角 θ_{rot} と ϕ_{rot} を定義することで回転軸を決定する．
次に回転軸を変更させてシミュレーションを行う．

3.3 シミュレーション

Table 3 のように $\vec{\omega}$ を変更させることで，異なる回転軸でのバットの回転を解析する．Table 3 のようにバッ

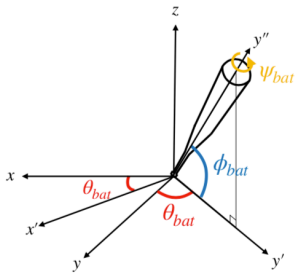


Fig. 7: Attitude of the bat using Euler angles.

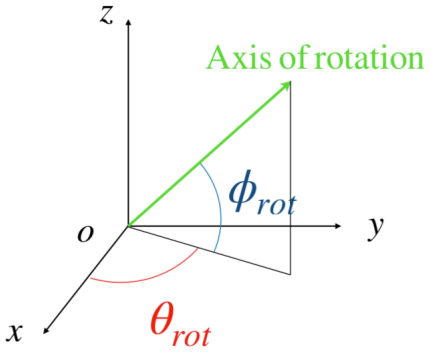


Fig. 8: The azimuthal and polar angles θ_{rot}, ϕ_{rot}.

トの初期姿勢の偏角である $\theta_{bat} = 45°$ と $\phi_{bat} = 75°$ を固定し，バットの回転軸の偏角である θ_{rot} と ϕ_{rot} のうち ϕ_{rot} を変更させてシミュレーションを行う．

Table 3: $\theta_{\vec{\omega}_n}$ and $\phi_{\vec{\omega}_n}$ at each change of pitch.

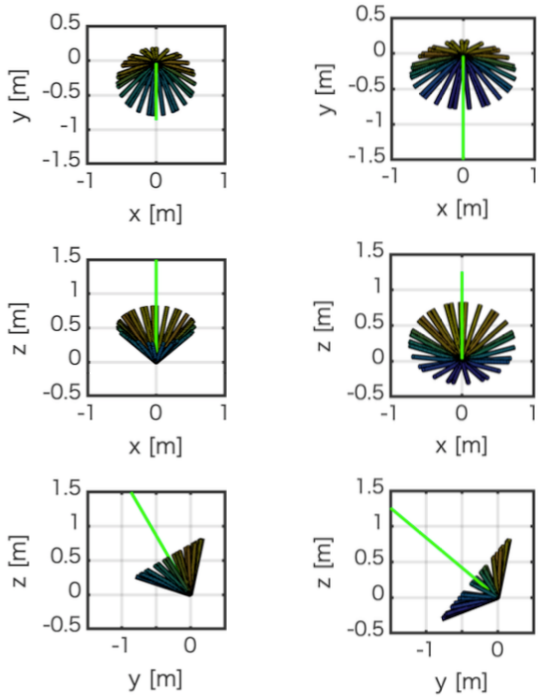
	case1	case2
$\theta_{rot}(°)$	-90	-90
$\phi_{rot}(°)$	40	60

3.4 結果

Fig.9 はバット軌道のトレースを示している．グラフは上からバット軌道を上から見た図，横から見た図，正面（ピッチャー側）から見た図となっている．また，緑色の線がバットの回転軸を表している．ピッチャー側から見た図を見ると case1 と case2 の回転軸が変わっていることが分かる．さらにバット軌道も回転軸に応じて変化していることが分かる．それにより，回転軸を変えることで任意のバット軌道を再現できることを確認した．

4 投手・打者モデルの融合

本章では，投手モデルと打者モデルを融合するために弾性衝突とエネルギー保存の原理を用いて衝突後のボール軌道をモデル化するための計算式を導出する．導



(a) case1 **(b)** case2

Fig. 9: Comparison of bat rotation traces with different rotation axes (top, side, front).

出した計算式を使用するために，未知の値を最適化問題を使って求めることで衝突後のボール軌道を MATLAB によるシミュレーションにより解析する．

4.1 衝突後のボール軌道計算式の導出

質量 m_{ball}, m_{bat} (kg)，慣性テンソル $I_{ball}, I_{bat} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ (kg · m^2)，位置 $\overrightarrow{p_{ball}}, \overrightarrow{p_{bat}} \in \mathbb{R}^3$ (m)，回転行列 $R_{ball}, R_{bat} \in \mathrm{SO}(3)$，衝突前速度 $\overrightarrow{v_{ball}}, \overrightarrow{v_{bat}} \in \mathbb{R}^3$ (m/s)，衝突前角速度 $\overrightarrow{\omega_{ball}}, \overrightarrow{\omega_{bat}} \in \mathbb{R}^3$ (rad/s)，衝突後速度 $\overrightarrow{\widetilde{v_{ball}}}, \overrightarrow{\widetilde{v_{bat}}} \in \mathbb{R}^3$ (m/s)，衝突後角速度 $\overrightarrow{\widetilde{\omega_{ball}}}, \overrightarrow{\widetilde{\omega_{bat}}} \in \mathbb{R}^3$ (rad/s)，重心に対する衝突位置 $r_{ball}, r_{bat} \in \mathbb{R}^3$，衝突点の物体表面における単位法線ベクトル $n \in \mathbb{R}^3$ と定義する．ここで，ボールとバットの衝突を弾性衝突と仮定する [13, 14, 15].
ボールとバットの全線運動量を

$$M_{lin} = m_{ball}\overrightarrow{v_{ball}} + m_{bat}\overrightarrow{v_{bat}} \tag{28}$$

全角運動量を

$$\begin{aligned} M_{ang} = \overrightarrow{p_{ball}} \times (m_{ball}\overrightarrow{v_{ball}}) + R_{ball}I_{ball}\overrightarrow{\omega_{ball}} \\ + \overrightarrow{p_{bat}} \times (m_{bat}\overrightarrow{v_{bat}}) + R_{bat}I_{bat}\overrightarrow{\omega_{bat}} \end{aligned} \tag{29}$$

とする．運動量が一定であるため

$$\frac{dM_{lin}}{dt} = 0, \quad \frac{dM_{ang}}{dt} = 0 \tag{30}$$

が成り立つ．弾性衝突を仮定するにあたって浸透度の現象を導入し，λ を定義すると衝突前と衝突後の速度と角速度は次のように関係する．

$$m_{ball}\overrightarrow{\tilde{v}_1} = m_{ball}\overrightarrow{v_{ball}} - \lambda n \tag{31}$$

$$m_{bat}\overrightarrow{\tilde{v}_2} = m_{bat}\overrightarrow{v_{bat}} + \lambda n \tag{32}$$

$$\begin{aligned} R_{ball}\cdot I_{ball}\cdot\overrightarrow{\tilde{\omega}_{bat}} &= R_{ball}\cdot I_{ball}\cdot\omega_{bat} \\ &\quad - R_{ball}\times(\lambda n) \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} R_{bat}\cdot I_{bat}\cdot\overrightarrow{\tilde{\omega}_{ball}} &= R_{bat}\cdot I_{bat}\cdot\overrightarrow{\omega_{ball}} \\ &\quad + R_{bat}\times(\lambda n) \end{aligned} \tag{34}$$

弾性衝突では衝突前の全エネルギーと衝突後の全エネルギーが等しくなるため，エネルギー保存則が次のように成り立つ．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum(m_i\cdot\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{\omega_i}\cdot I_i\cdot\overrightarrow{\omega_i}) \\ &= \frac{1}{2}\sum(m_i\cdot\overrightarrow{\tilde{v}_i}\cdot\overrightarrow{\tilde{v}_i} + \overrightarrow{\tilde{\omega}_i}\cdot I_i\cdot\overrightarrow{\tilde{\omega}_i})\,(i = ball, bat) \end{aligned} \tag{35}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_{ball}\overrightarrow{v_{ball}}^2 + \frac{1}{2}m_{bat}\overrightarrow{v_{bat}}^2 + \frac{1}{2}I_{ball}\overrightarrow{\omega_{ball}}^2 + \frac{1}{2}I_{bat}\overrightarrow{\omega_{bat}}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_{ball}\overrightarrow{\tilde{v}_{ball}}^2 + \frac{1}{2}m_{bat}\overrightarrow{\tilde{v}_{bat}}^2 + \frac{1}{2}I_{ball}\overrightarrow{\tilde{\omega}_{ball}}^2 + \frac{1}{2}I_{bat}\overrightarrow{\tilde{\omega}_{bat}}^2 \end{aligned} \tag{36}$$

また，式 (31)-(34) より，

$$\overrightarrow{\tilde{v}_{ball}} = \overrightarrow{v_{ball}} - \frac{\lambda}{m_{ball}}n \tag{37}$$

$$\overrightarrow{\tilde{v}_{bat}} = \overrightarrow{v_{bat}} + \frac{\lambda}{m_{bat}}n \tag{38}$$

$$\overrightarrow{\tilde{\omega}_{ball}} = \overrightarrow{\omega_{bat}} - \lambda q_{ball} \tag{39}$$

$$\overrightarrow{\tilde{\omega}_{bat}} = \overrightarrow{\omega_{ball}} + \lambda q_{bat} \tag{40}$$

ここで，q_i は次式で与えられる．

$$q_i = I_i^{-1}\cdot R_i^{-1}\cdot(r_i\times n)\,(i = ball, bat) \tag{41}$$

これらの式を用いて式 (36) を λ について解くと，

$$\lambda = \frac{2\left(\overrightarrow{v_{ball}}\cdot n - \overrightarrow{v_{bat}}\cdot n + q_{ball}\cdot I_{ball}\cdot\overrightarrow{\omega_{bat}} - q_{bat}\cdot I_{bat}\cdot\overrightarrow{\omega_{ball}}\right)}{\left(\frac{1}{m_{ball}} + \frac{1}{m_{bat}}\right)n\cdot n + q_{ball}\cdot I_{ball}\cdot q_{ball} + q_{bat}\cdot I_{bat}\cdot q_{bat}} \tag{42}$$

となり，衝突前のパラメータで衝突後のボール軌道を求めることができる．

4.2 重心に対する衝突位置 r_i と n の計算

λ を計算する上で未知の値である r_i, n を求めるためにボールとバットの質量中心を Fig.10 のように p_{ball}, p'_{bat} と定義する．ここで，$p'_{bat} \neq p_{bat}$ であることに注意する．ボールは球の形をしているため重心はボールの中心である．バットは複雑な形をしているため重心は計算する必要があるが, 本論文ではバットは円柱の形をしていると仮定している．Fig.10 のように r_{ball} は基準座標系における p_{ball} に対する衝突点の位置を表し，r_{bat} は基準座標系における p_{bat} に対する衝突点の位置を表している．

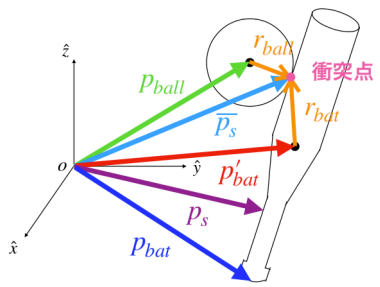


Fig. 10: Coordinate system at the time of ball and bat collision.

実際の衝突点を $\overline{p_s}$ とする．ボールとバットの衝突を検出したときに次の方法で $\overline{p_s}$ を求める．Fig.10 のように基準座標系における衝突決定変数を $p_s = [x_s\ y_s\ z_s]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ とする．ここで，衝突決定変数 p_s が，バットの表面上にあるという制約を設けたとき，コスト関数 $J(p_s) = \|p_{ball} - p_s\|^2$ を最小にする点 $p_s^* = [x_s^*\ y_s^*\ z_s^*]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ が実際の衝突点 $\overline{p_s}$ に収束していくことを目標とする．その p_s^* を使うことで r_{ball} を求めることができる．しかし，このコスト関数は凸関数ではないため，最適な解に収束しない可能性がある．そこで，実際の衝突点はボールの重心と近いことから初期値をボールの重心にして次の最適化問題

$$\begin{aligned} &\min_{(x_s,y_s,z_s)}\ J(p_s) = \|p_{ball} - p_s\|^2 \\ &\text{s.t. } R_{bat}^{\mathrm{T}}\cdot(p_s - p_{bat}) = [x'_s\ y'_s\ z'_s]^{\mathrm{T}} \\ &\qquad\qquad {x'_s}^2 + {z'_s}^2 - \rho_{bat}^2 = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

を解く．ここで，R_{bat} はバットの回転行列，ρ_{ball} はバットの半径である．

p_s^* が実際の衝突点 $\overline{p_s}$ に収束して $p_s^* = \overline{p_s}$ を満たしているとすると，r_{ball}, r_{bat} は

$$r_{ball} = p_s^* - p_{ball} \tag{44}$$

$$r_{bat} = p_s^* - p_{bat} \tag{45}$$

となる．また，n は単位法線ベクトルであるので式 (44) を用いて $n = -r_{ball}/\|r_{ball}\|$ と表すことができる．

4.3 慣性テンソル I

λ を計算する上で未知の値である慣性テンソル I_{ball}, I_{bat} を求める [16]．半径 r，質量 m の球体があ

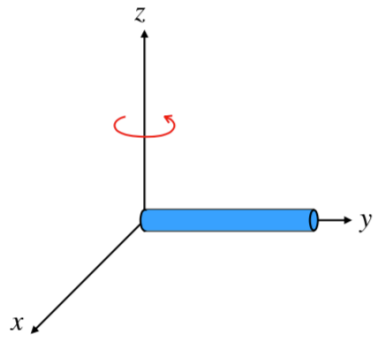


Fig. 11: Slender rod along y-axis.

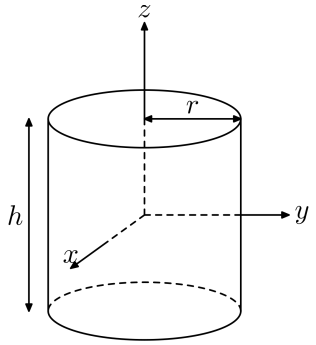


Fig. 12: Solid cylinder of radius r, height h.

るとき，この球体の慣性テンソルは

$$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix} \tag{46}$$

と表すことができる．本研究ではボールを密度が均一で球の形をしていると仮定しているので，野球のボールの半径 r_{ball} と質量 m_{ball} を用いて式 (46) に代入すると，

$$I_{ball} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}m_{ball}r_{ball}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m_{ball}r_{ball}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m_{ball}r_{ball}^2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

となる．次に Fig.11 のような原点を中心に y 軸に沿った長さ l，質量 m の細長い棒があるとき，慣性テンソルは

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

と表すことができる．また，Fig.12 のような半径 r, 高さ h, 質量 m の円柱があるとき，この円柱の慣性テンソルは

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

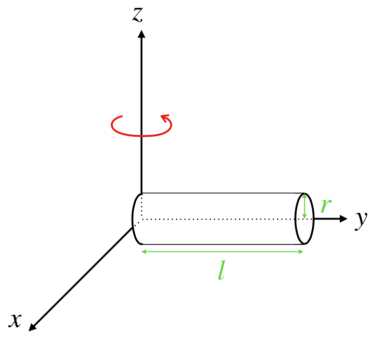


Fig. 13: Hypothetical baseball bat of radius r, length l.

と表せる．ここでは半径を考えていることに注意する．本研究では Fig.13 のようにバットは円柱であり，原点を中心に y 軸に沿っていることを仮定しているので，式 (48,49) より，質量 m_{bat}, 半径 ρ_{bat}, 長さ l_{bat} のバットの慣性テンソル I_{bat} を

$$I_{bat} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_{bat}(3\rho_{bat}^2 + l_{bat}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_{bat}\rho_{bat}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_{bat}(3\rho_{bat}^2 + l_{bat}^2) \end{bmatrix}$$

とした．ここで，Fig.12 の物体の座標と Fig.13 の座標が違うことに注意する．

4.4 シミュレーション

λ の計算に必要な値を求められたので，衝突後のボール軌道についてバットの衝突前角速度 $\vec{\omega}_{bat}$ とボールの初速度 v_0 をパラメータとして変更し，MATLAB によるシミュレーションにより結果を解析する．

Table 4 に示すように $\vec{\omega}_{bat}$ を 40 rad/s に固定し，v_0 を 120 km/h から 150 km/h に変化させてシミュレーションを行った．ボールの初速度が変化するとボールの軌道も変化するのでバットの初期位置を変えることによって同じような衝突になるように手動で調整した．今回のシミュレーションでは打球は x 軸上（センター方向）を飛球するように調整している．また，サンプリングタイムは 1.39×10^{-4} s とした．

Table 4: $\vec{\omega}_{bat}$ and $\vec{v}_0$ used in the simulation.

	case1	case2	case3	case4
$\overrightarrow{\omega_{bat}}$	40	40	40	40
$\overrightarrow{v_0}$	120	130	140	150

4.5 結果

Fig.14 は衝突後のボール軌道を横（一塁側）からみた図となっている．球速が 10 km/h ずつ速くなるごとに飛距離が約 5 m ずつ伸びている．また，一番飛距離が伸びている case 4 は 53 m である．一般的にプロ野球

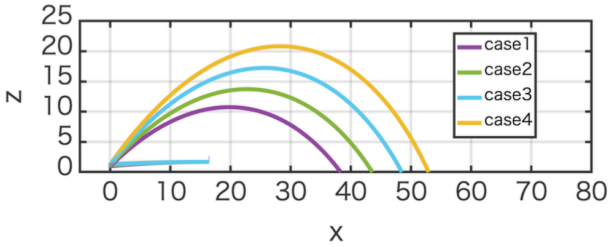


Fig. 14: Ball trajectory viewed from the side.

で使用されるグラウンドではセンター方向に少なくとも 120 m 飛ばさなければホームランにならない．与えられたパラメータの中で比較的飛距離が出るように調整したが，ホームランには到底及ばない結果が得られた．これは本研究では弾性衝突を考えているため，摩擦によるボールの回転の変化がないことやバットが運動が回転運動のみで並行運動が考えられていないことが原因だと考える．

5　おわりに

投手が投げるボール軌道は，ニュートンの第二法則から 3 次元空間での野球ボールの運動方程式を導出し，揚力と抗力を考えることによって空気抵抗や回転によって生まれる力を考慮してモデル化した．打者のスイング軌道は，バットの姿勢を決定するために回転行列を導入することで回転軸を変えて任意のバット軌道を再現することができた．最後に弾性衝突とエネルギー保存の原理を用いて衝突後のボール軌道計算式を導出することで 2 つのモデルを融合し，投手およびバッティングを一貫したモデルを構築した．

本研究では，弾性衝突を考えているため衝突時のボールとバットの摩擦は考えられていない．今後の展望として，摩擦などの外力を考慮することによって複雑化し，より現実的なボール軌道に近づける．また，モデルに機械学習を実装することで打者のシステムを考える新たなマシンの設計に貢献したい．

参考文献

[1] 酒井，北河，金井，尾田：ローラ式ピッチングマシンの投球シミュレーションとその最適化に関する研究；日本機械学会論文集 C 編，Vol.74 巻, No.12 号, pp.2864-2869 (2008)

[2] 酒井：野球用ローラ式ピッチングマシンのトライポロジー；トライポロジスト，Vol.58 巻, No.1 号, pp.24-29 (2013)

[3] 長谷川，坂本，田多，鳴尾，溝田：風洞実験による硬式野球ボールの空力特性 (回転軸の方向の違い)；シンポジウム：スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス講演論文集，A4，pp.31-34 (2011)

[4] 桧山，長岡，坪井，野田，姫野：硬式野球ボール型加速度センサにおける回転軸変化のシミュレーションによる再現；日本機械学会論文集，Vol.87 巻, No.899 号, pp.21-00050 (2021)

[5] 長岡，荻野，坪井，野田，姫野：加速度センサを用いた飛翔中の野球ボールの回転特性計測；日本機械学会論文集，Vol.85 巻, No.876 号, pp.18-00440 (2019)

[6] 前田：硬式野球ボール型加速度センサにおける回転軸変化のシミュレーションによる再現；シンポジウム：スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス講演論文集，Vol.87 巻, No.899 号, pp.21-00050 (2021)

[7] 谷口，宮嵜，清水，姫野：硬式ボールに働く空気力の測定；日本流体学会誌「ながれ」，Vol.25 巻, No.3 号, pp.257-264 (2006)

[8] 宮澤，志村，城所，若原，矢内：野球のバッティングにおけるインパクトシミュレーション；日本機械学会論文集 A 編，Vol.77 巻, No.777 号, pp.813-822 (2011)

[9] 神田，鳴尾：軟式野球ボールとバットの衝突シミュレーション；日本機械学会論文集 C 編，Vol.73 巻, No.729 号, pp.1307-1313 (2007)

[10] 前田：投球コースの違いがバットスイングに及ぼす影響 (野球)；ジョイント・シンポジウム講演論文集，pp.103-107 (2007)

[11] 長島，清原，高橋：野球場における防球ネット高さの解析；東北学院工学部研究報告，Vol.54 巻, No.1 号, pp.1-11 (2020)

[12] `http://blog.livedoor.jp/baseball_motion/archives/81463970.html`

[13] `http://www.hakenberg.de/diffgeo/collision_resolution.htm`

[14] David H. Eberly: *Game Physics, 2nd Edition*, Elsevier Morgan Kaufmann (2010)

[15] Christer Ericson: *Real Time Collision Detection*, Elsevier Morgan Kaufmann (2005)

[16] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia`