

カーネルに基づく予測制御アロケーションの設計と 推力ベクトル制御システムへの応用

○ Nguyen Tam, 平田 研二 (富山大学)

Kernel-Based Predictive Control Allocation Design and Its Application to Thrust Vector Control Systems

*Tam W. Nguyen, Kenji Hirata (University of Toyama)

Abstract— This paper proposes a novel kernel-based predictive control allocation for the control of thrust vector systems. This controller uses the kernel space of the thruster attitude mapped to the effective force to compute the optimal sequence of controls and attitude references. In particular, the controller solves a nonlinear optimization problem, where a specialized term is added to the cost function to penalize the deviation of the desired attitude from its kernel space. The weight associated to this specialized term uses a Gaussian bell-curve function to facilitate the tuning of the attitude-reference generation and enhance the performance of the controller. The effectiveness of the controller is tested by simulating a drone manipulating an object in two dimensions.

Key Words: Model predictive control, Optimization, Thrust vector control, Aerospace applications

1 はじめに

無人航空機（ドローン）の用途は、過去十年間で劇的に変化している。ドローンは通常、監視¹⁾、写真測量⁶⁾、写真撮影⁵⁾、その他幅広い実用的な用途で使用されている。しかし最近では、周囲の他の車両や物体と相互作用できる、有効な「ロボットヘルパー」としてますます使用されるようになってきた^{2, 7, 11, 8)}。

ドローンと他の車両や物体との物理的な相互作用の場合、ドローンは、指定された方向に所望の推力を発生させることが可能であり、本質的に「方向性スラスト」と見なすことができる⁹⁾。つまり、ドローンは方向性を持った力ベクトルとして抽象化することができ、ドローンに適切なトルクをかけることでその方向を制御することができる。その中で、方向性スラストを制御するために、「制御アロケーション」という方式が普及してきている³⁾。

制御アロケーション方式は、「階層型運動制御」と呼べるアプローチであり、一次制御目的と二次制御目的をそれぞれ実現する二つの層に分解することができる。具体的に、一次制御目的は、システムに適用される全体的な力とトルクを制御する高レベルの制御器によって達成される。下位の制御器は、アクチュエータが所望の力とトルクを生成するように制御するために追加され、副次的目的を適切に設定することで実現することができる。

以下の例で、制御アロケーション方式を直感的に理解することができる。Fig. 1 のように、棒の姿勢を α から α_d へ移動させるとする。一次目的は、単純に $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \alpha_d$ として収束させることである。しかし、関節のトルクを直接制御することはできず、棒の先端にあるスラストのみを制御する。Fig. 2 に示すように、制御アロケーションの第一制御層は所望のトルク τ_d を生成し、第二制御層を通じてドローンの所望の姿勢 β_d と所望の推力 T_d に変換する役割を担っている。

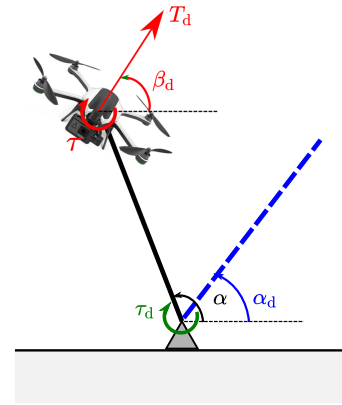


Fig. 1: Drone manipulating an object to the desired orientation, where α is the bar angle, τ the torque applied on the drone, and T_d , τ_d , α_d , β_d are the desired thrust, desired torque, desired bar angle, and desired drone attitude, respectively.

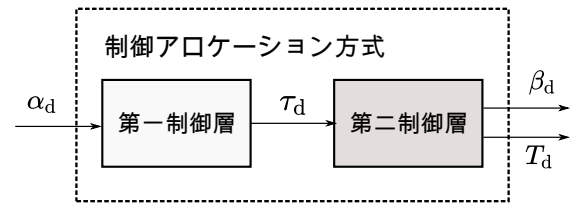


Fig. 2: Control-allocation scheme. To achieve $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \alpha_d$, the first control layer generates the desired torque τ_d , which is converted by the second control layer to the desired attitude β_d and the desired thrust T_d .

しかし、上述した制御アロケーション方式を方向性スラスト系に適用する際、二つの課題がある。一つは、望ましい姿勢を瞬時に達成することができないことである。そのため、システム全体の安定性を確保しつつ、

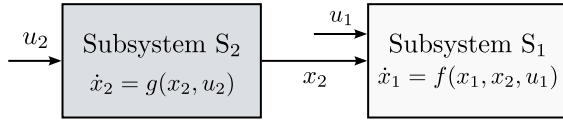


Fig. 3: Cascaded system considered in this paper.

制御アロケーション方式に十分に高速な内部ループを追加する必要がある。第二に、所望の τ_d を生成する (T_d, β_d) 写像は一般に一意ではない。さらに、(9)で研究されているように、閉ループシステム全体を考える場合、写像はリプシッツ連続性を満たさなければシステム全体の安定性を確保できない。

そこで、本論文では、システム制約を満たし、写像と内部ループ設計の問題を軽減するために、数値的かつ最適なアプローチを提案する。特に、新規のカーネルに基づく予測制御アロケーションを提案する。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、方向性スラスト系の一般的なモデルを紹介する。次に、3節では、カーネルに基づく予測制御アロケーションを提案する。最後に、二次元における物体を操作するドローンの事例を考え、提案した制御器を評価するために、このシステムに制御方式を適用する。

2 方向性スラスト系の一般的なモデル化

サブシステム1, サブシステム2をそれぞれ S_1, S_2 とする。また、連続時間 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, S_1 の状態 $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, S_2 の状態 $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, S_1 の入力 $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, S_2 の入力 $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ とする。

非線形時不変の次式で与えられる Fig. 3 のようなシステムを考える。

$$S_1 \equiv \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, u_1), \quad (1)$$

$$S_2 \equiv \dot{x}_2 = g(x_2, u_2). \quad (2)$$

ここで、 $f: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ と $g: \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ は連続かつ非線形であり、 (x_1, x_2, u_1) より S_1 は次の実効入力を生成する。

$$\tilde{u}_1 = \Psi(x_1, x_2, u_1). \quad (3)$$

ここで、 $\Psi: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ は連続および非線形である。さらに、 $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ の入力制約を考慮する。ここで、 $u \triangleq [u_1^T u_2^T]^T$, $u_{\min} < u_{\max} \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ であり、不等式は要素ごとにとられる。次に、以下の仮定を考慮する。

仮定 1. システム (1)-(3) において、 $\dim(u_1) + \dim(x_2) = m_1 + n_2 > \dim(\tilde{u}_1) = \tilde{m}_1$ が成り立つ。

注意 1. 仮定 1 より、 \tilde{u}_1 を与える x_1, x_2, u_1 は、一般に一意には定まらない。

仮定 2. $\Psi(\cdot)$ のカーネルは次式で与えられ、

$$\ker(\Psi(\cdot)) \triangleq \{(x_1, x_2, u_1) : \Psi(x_1, x_2, u_1) = 0\}, \quad (4)$$

非空であり、以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} \forall (x_1, u_1) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{m_1}, \exists \mathcal{K} \in C^0 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} \\ \text{s.t. } x_2 = \mathcal{K}(x_1) \Rightarrow \tilde{u}_1 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 C^0 は全ての連続関数の集合である。

仮定 3. 線形化されたシステムが不可制御になる平衡点が存在する。つまり、 $x \triangleq [x_1^T x_2^T]^T$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$, $\tilde{x} \triangleq x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$, $\Gamma(x, u) \triangleq [f(x_1, x_2, u_1)^T g(x_2, u_2)^T]^T$, $A \triangleq \frac{\partial \Gamma(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}$, $B \triangleq \frac{\partial \Gamma(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ とすると、次式で与えられる線形化されたシステムの可制御性行列 \mathcal{C} は階数不足 (*rank deficient*) である。

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad (6)$$

$$0 = \Gamma(\bar{x}, \bar{u}). \quad (7)$$

すなわち、

$$\text{rank}(\mathcal{C}) < n_1 + n_2. \quad (8)$$

ここで、 $\mathcal{C} \triangleq [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n_1+n_2-1}B]$ である。

次に、 $x_{1,d} \in \mathbb{R}^{n_1}$ と $x_{2,d} \in \mathbb{R}^{n_2}$ をそれぞれ S_1 と S_2 の所望の状態とする。制御の第一の目的は、 x_1 を $x_{1,d}$ に収束させることである。副次的な目的は二元的であり、次のように定式化することができる。

1. システム全体の安定性を確保しつつ、 x_2 が $x_{2,d}$ に漸近的に収束するように u_2 を設計すること。
2. x_2 を写像によって設計し、理想的実効入力 $\tilde{u}_{1,d} \triangleq \Psi(x_1, x_{2,d}, u_1)$ を生成すること。

上記二点の設計は容易ではない。実際、閉ループシステム全体がスモールゲイン条件⁴⁾を満たすように、 x_2 は $x_{2,d}$ に十分速く収束する必要がある。さらに、写像は一般に一意ではない。そこで、本論文では、解析的にこの問題にアプローチする代わりに、モデル予測制御を用いた数値的手法を提案する。ただし、漸近安定性を確保するために、コスト関数にカーネル空間を用いた特別な項を追加する必要がある。

3 カーネルに基づく予測制御アロケーション

まずは、次のようにルンゲ・クッタ⁴⁾によってシステム (1), (2) を離散化する。

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6} T_s \sum_{i=1}^4 k_i. \quad (9)$$

ここで、 $k_1 = \Gamma(x_k, u_k)$, $k_2 = \Gamma(x_k + T_s \frac{k_1}{2}, u_k)$, $k_3 = \Gamma(x_k + T_s \frac{k_2}{2}, u_k)$, $k_4 = \Gamma(x_k + T_s k_3, u_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ は離散的時刻、 $x_k \triangleq x(kT_s)$, $u_k \triangleq u(kT_s)$, $T_s \in \mathbb{R}_{>0}$ は十分小さく選ばれたサンプリング時間である。

次に、全ての x に対して次のようにガウス・ベル関数を定義する。

$$\Omega(x, \kappa_p, \kappa_w) \triangleq \kappa_p \exp\left(-\frac{x^2}{\kappa_w}\right). \quad (10)$$

ここで、 $\kappa_p \in \mathbb{R}_{>0}$ と $\kappa_w \in \mathbb{R}_{>0}$ はガウス・ベル関数のパラメータである。Fig. 4 に示すように、ガウス・ベル

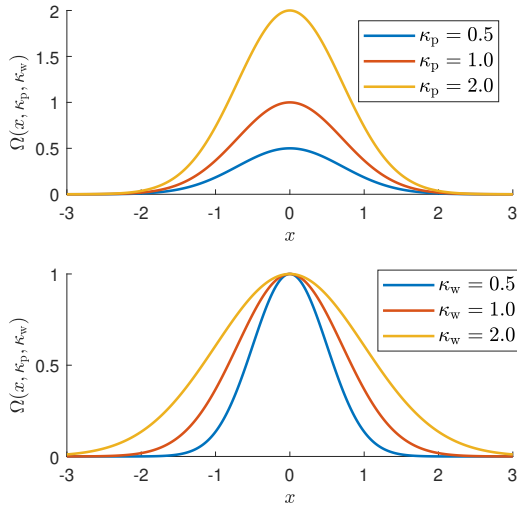


Fig. 4: Shape of the Gauss-bell function (10) for different values of κ_p and κ_w . In the first subplot, $\kappa_w = 1$, and in the second subplot, $\kappa_p = 1$. Through κ_p and κ_w , it is possible to modify the maximum value and the width of the function, and for $\kappa_p > 0$ and $\kappa_w > 0$, we can see that the maximum value of $\Omega(\cdot)$ is $\Omega(0, \kappa_p, \kappa_w) = \kappa_p$.

関数 $\Omega(\cdot)$ は左右対称であり、 κ_p と κ_w はそれぞれ $\Omega(\cdot)$ の最大値と幅を調整することができる。

$k \geq 0$ に対して、最小化最適化問題は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
\min_{u_i, x_{2,d,i}} J_k &= \sum_{i=k}^{k+N} (x_i - x_{d,i})^T Q (x_i - x_{d,i}) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{k+N} (u_i - u_{i-1})^T R (u_i - u_{i-1}) \\
&+ \sum_{i=k}^{k+N} \Omega(\|\tilde{u}_{1,d,i}\|_2, \kappa_p, \kappa_w) \|\tilde{\mathcal{K}}_i(x_1)\|_2^2, \\
\text{s.t.} \quad (9), \\
u_{\min} &\leq u_i \leq u_{\max}, \\
\Delta(x_{2,d,i}) &= 0, \\
i &= k, \dots, k+N.
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、 $x_{d,i} = [x_{1,d,i}^T \ x_{2,d,i}^T]^T \triangleq x_d(iT_s)$ は時刻 i における所望の状態、 $\tilde{\mathcal{K}}_i(\cdot) \triangleq x_{2,d,i} - \mathcal{K}(\cdot)$ は時刻 i における $x_{2,d,i}$ と $\mathcal{K}(\cdot)$ との誤差、 $\tilde{u}_{1,d,i}$ は時刻 i における理想的な実効入力、 $\|\cdot\|_2$ は ℓ_2 絶対値、 $Q \in \mathbb{R}_{>0}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ と $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{(m_1+m_2) \times (m_1+m_2)}$ はそれぞれ状態重みと制御重みである。 $N \in \mathbb{N}$ は十分に長く選ばれた予測ホライズン、 $\Delta(\cdot) : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ は $x_{2,d,i}$ に関する等式制約である。さらに、全ての $i = 0, \dots, N$ に対して、所望の状態 $x_{2,d,i}$ が決定変数である。

式 (11) の重要な要素は、 J_k の 3 番目の総和である。式 (10) より、 κ_p がゼロに近づくと、この項はなくなることがわかる。目標は、 $\|\tilde{u}_{1,d,i}\|_2$ がゼロに近づくと、予測ホライズンの各時刻 i における $x_{2,d,i}$ と $\Psi(\cdot)$ のカー

ネル空間の点の間の誤差の ℓ_2 絶対値を最小化することにある。カーネル空間からの偏差ペナルティは、 κ_p と κ_w によって調整することができる。

4 事例：二次元で物体を操作するドローン

本節では、二次元における物体を操作するドローンのシステムを考え、カーネルに基づく予測制御アロケーションを適用する。まずは、力学系の主要な性質を解析する。次に、提案した制御器を評価するため、数値シミュレーションを行う。

4.1 システムの主要な性質の解析

$m_u \in \mathbb{R}_{>0}$ はドローンの質量、 $I_u \in \mathbb{R}_{>0}$ はドローンの慣性、 $m_o \in \mathbb{R}_{>0}$ は物体の質量、 $I_o \in \mathbb{R}_{>0}$ は物体の慣性、 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ は物体の長さとする。さらに、 $\alpha \in [0, \pi]$ は水平に対する物体の角度、 $\beta \in [-\pi, \pi]$ は水平に対するドローンの推力の角度とする。システムはドローンのトルク $\tau \in \mathbb{R}$ と推力 $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ によって作動される。システムの運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ \tilde{I}^{-1} \ell (u_1 \sin(x_{2,1} - x_{1,1}) - \tilde{m} g \cos x_{1,1}) \end{bmatrix} \\
&= f(x_1, x_2, u_1),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{2,2} \\ I_u^{-1} u_2 \end{bmatrix} = g(x_2, u_2). \tag{13}$$

ここで、 $\tilde{I} \triangleq \frac{m_o \ell^2}{4} + I_o + m_u \ell^2$ 、 $\tilde{m} \triangleq \frac{m_o}{2} + m_u$ 、 $g \in \mathbb{R}_{>0}$ は重力加速度、 $x_1 \triangleq [x_{1,1} \ x_{1,2}]^T = [\alpha \ \dot{\alpha}]^T$ 、 $x_2 = [x_{2,1} \ x_{2,2}]^T = [\beta \ \dot{\beta}]^T$ 、 $u_1 = T$ 、 $u_2 = \tau$ である。式 (12)、(13) は式 (1)、(2) と対応することに注意する。

式 (3) より、次のように実効入力を導出できる。

$$\tilde{u}_1 = u_1 \sin(x_{2,1} - x_{1,1}). \tag{14}$$

ここで、 $\dim(u_1) + \dim(x_2) = 3 > \dim(\tilde{u}_1) = 1$ が成立するため、仮定 1 と対応する。

さらに、(4) より $\Psi(\cdot)$ のカーネルは次式で与えられる。

$$\ker(\Psi(\cdot)) = \{(x_1, x_2, u_1) : u_1 \sin(x_{2,1} - x_{1,1}) = 0\}. \tag{15}$$

式 (15) より、全ての $(x_1, u_1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ に対して、 $x_2 = \mathcal{K}(x_1) \Rightarrow \tilde{u}_1 = 0$ を満たすような C^0 級の関数 $\mathcal{K}(\cdot)$ が存在することがわかる。具体的に、全ての $\gamma \in \mathbb{R}$ かつ全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\mathcal{K}(\cdot) \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ である。ここで、

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}} \triangleq \{\mathcal{K}_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathcal{K}_n(x_1) = [x_{1,1} + n\pi \ \gamma]^T\}. \tag{16}$$

上述した事実は仮定 2 と対応する。

次に、平衡点 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = [\frac{\pi}{2} \ 0]^T$ および $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ を考慮する。 $(\bar{x}, \bar{u}) \triangleq ([\bar{x}_1^T \ \bar{x}_2^T]^T, [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2]^T)$ 付近に線形化されたシステムは (6)、(7) で与えられる。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{I}^{-1} \ell \tilde{m} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_u^{-1} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

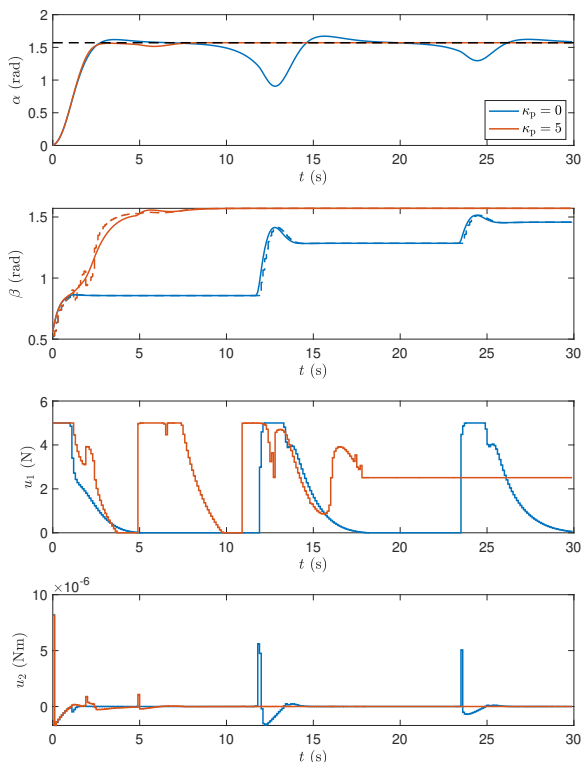


Fig. 5: Simulation results of a drone manipulating an object in two dimensions in the case where $\alpha_d = \pi/2$. In the second subplot, the dashed lines represent the trajectories computed by the kernel-based model predictive control allocation. We can see that, the third term of the cost function (11) is crucial to stabilize the entire system.

可制御性行列 (8) の階数は次のように求められる。

$$\text{rank}(C) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 < 4. \quad (18)$$

ここで、 C は階数不足であるため、線形化されたシステムは不可制御である。この事実は仮定 3 と対応する。

4.2 数値シミュレーション

システム (12), (13) を考え、 $m_u = 100$ g, $I_u = 1.014$ g²m², $m_o = 30$ g, $I_o = 2$ kg²m², $L = 1.25$ m とする。さらに、推力制約を $0 \text{ N} \leq u_1 \leq 5 \text{ N}$, トルク制約を $|u_2| \leq 0.2 \text{ Nm}$ とする。本論文のパラメータは実データ⁸⁾より得られた。第一制御目標は、物体の姿勢を $\alpha_d \in [0, \pi]$ に安定化することである。

カーネルに基づく予測制御アロケーションは、 $K(\cdot) = [x_{1,1} \ 0]^T$, $Q = \text{diag}\{3, 1, 2, 5\}$, $R = \text{diag}\{1, 0.01\}$, $T_s = 0.1 \text{ s}$, $N = 15$ を用いる。 $\alpha_d = \pi/2$ の場合、シミュレーションの結果を Fig. 5 に示す。

5 まとめ

本論文では、新規のカーネルに基づく予測制御アロケーションを提案した。この制御器は、スラスト姿勢から実効力までのカーネル空間を用いて、入力・姿勢

目標値の最適順序を計算した。具体的に、姿勢目標値とカーネル空間との偏差をペナルティを果たすためのコスト関数に加えた特別の項を用いて、非線形最小化問題を解決した。制御器の性能を向上させ、姿勢目標軌道の生成の調整を容易にするために、この特別の項に関する重みはガウス・ベル関数を利用する。上述した制御方式は二次元における物体を操作するドローンシステムに適用した。今後は、入力の手間を減らすために、終端状態制約について研究を行いたい。

6 謝辞

本研究の一部は、「令和 4 年度公益財団法人富山県ひとづくり財団高等教育振興事業助成金」で行われた。

参考文献

- 1) Nozhan Hosseini, Hosseinali Jamal, Jamal Haque, Thomas Magesacher, and David W. Matolak. Uav command and control, navigation and surveillance: A review of potential 5g and satellite systems. In *2019 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–10, 2019.
- 2) Idris Jeelani and Masoud Gheisari. Safety challenges of uav integration in construction: Conceptual analysis and future research roadmap. *Safety Science*, 144:105473, 2021.
- 3) Tor A. Johansen and Thor I. Fossen. Control allocation - a survey. *Automatica*, 49(5):1087–1103, 2013.
- 4) Hassan K Khalil. *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- 5) Ioannis Mademlis, Vasileios Mygdalis, Nikos Nikolaidis, and Ioannis Pitas. Challenges in autonomous uav cinematography: An overview. In *2018 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)*, pages 1–6, 2018.
- 6) Patricio Martínez-Carricondo, Francisco Agüera-Vega, Fernando Carvajal-Ramírez, Francisco-Javier Mesas-Carrascosa, Alfonso García-Ferrer, and Fernando-Juan Pérez-Porras. Assessment of uav-photogrammetric mapping accuracy based on variation of ground control points. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 72:1–10, 2018.
- 7) Ivan Maza, Konstantin Kondak, Markus Bernard, and Anibal Ollero. Multi-uav cooperation and control for load transportation and deployment. In *Selected papers from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA June 8–10, 2009*, pages 417–449. Springer, 2009.
- 8) Tam Willy Nguyen, Laurent Catoire, and Emanuele Garone. Control of a quadrotor and a ground vehicle manipulating an object. *Automatica*, 105:384–390, 2019.
- 9) Tam Willy Nguyen, Mehdi Hosseinzadeh, and Emanuele Garone. Thrust vector control of constrained multibody systems. *Automatica*, 129:109586, 2021.
- 10) Andre Süli and David F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003.
- 11) Nicolas Staub, Mostafa Mohammadi, Davide Bicego, Quentin Delamare, Hyunsoo Yang, Domenico Praticchizzo, Paolo Robuffo Giordano, Dongjun Lee, and Antonio Franchi. The tele-magmas: An aerial-ground comanipulator system. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 25(4):66–75, 2018.