

野球におけるバットとボールの衝撃相互作用を考慮した 投球および打球の3次元軌道解析と実験検証

○味岡 晃生 Nguyen Tam 平田 研二 (富山大学)

Experimental Validation of a 3D Baseball Trajectory Model from Pitcher to Batter Considering Shock Modeling Interactions

*Kousei Ajioka, Tam W. Nguyen, Kenji Hirata (Toyama University)

Abstract: This paper aims to verify experimentally the validity of a baseball model using energy conservation principles by comparing the experimental trajectory of the baseball with its simulated trajectory. First, the model used in this paper for the simulations is briefly summarized. Next, the coefficients and initial values required to parameterize the equations of motion are introduced, where the known parameters and unknown initial values are clearly separated. Regarding the experimental setup, we describe in detail the experimental environment and the procedures to measure the initial conditions and the trajectories of the bat and the baseball. In particular, the measured values are used to determine the initial conditions of the baseball and the bat, and the initial values are adjusted in a trial-and-error fashion. The baseball trajectories and the simulations results are compared to validate the proposed model.

Keywords: Impact Action, Simulation, Experimental Verification

1 はじめに

近年、野球の打撃や投球において、モデルを活用したシミュレーションに関する研究 [1, 2] が報告されている。しかし、これらの研究は衝突現象を2次元空間で扱うか、衝突時のあらゆる現象を考慮していない場合がある。[1] は3次元空間であり、投球から打球までを一貫しているシステムであるが、バッターとインパクト位置との3次元位置関係を実験に基づき定式化しているため、任意の衝突に対応することが難しい。一方で、以前提案したモデル [3, 4] は3次元空間においてボールとバットの衝突を非弾性衝突、エネルギー保存の原理、衝撃力、角運動量保存の現象を用いて解析的にモデリングしているため、あらゆる衝突に対応することが可能である。本研究では、このモデルを用いて投球および打球の3次元軌道解析と実験検証を行う。

野球に関するモデルを実験的に検証した研究 [5, 6] が報告されているように、実験による検証の重要性は多岐にわたる。まず、モデルが現実の現象やプロセスを適切に捉えているかを確認し、その妥当性を確認する役割がある。また、モデルの予測と異なる結果が得られた場合、パラメータの調整や考慮していない現象、測定 of 正確性などの複雑な課題について議論することができ、モデルの改善につながる。総じて、実験による検証は理論的なモデルの妥当性を確認し、その実用性や効果を把握するために欠かせないプロセスといえる。

参考論文 [3, 4] では、他の文献 [5] から入手した実験データや、球場に設置されているカメラやセンサによっ

て、プロ選手の試合における打球軌道を解析するデータツール [7] から入手したデータをもとにシミュレーション結果との比較検証を行っている。ただし、投球されたボールやスイング軌道の詳細なデータ、例えば、回転数や回転軸、またスイングスピードなどの情報入手することは難しい場合もあり、得られるデータの種類には制限がある。そのため、本研究はセンサを活用してこれらのデータや実際の打球軌道を自ら測定することで、より詳細なデータを用いた実験検証を行い、提案モデルの妥当性を検証することが目的である。

2 本モデルについて

本章では [3, 4] に示したモデルの運動方程式について簡単に記述する。

Fig. 1 のように投手・打者システムのボール軌道の運動方程式は (I), (II), (III) の3つに分解できる。

(I) は投手が投げてからバットに衝突する直前までである。ボールの質量 $m_{ball} \in \mathbb{R}_{>0}$ 、位置 $\vec{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ 、ボールの初期状態を $\chi_0 = [v_0, N_0, \theta_{v_0}, \phi_{v_0}, \theta_{\omega_{n_0}}, \phi_{\omega_{n_0}}, \overrightarrow{p_{ball_0}}]$ とし、ボール軌道の運動方程式は

$$\ddot{\vec{p}} = \mathcal{F}(\chi_0, m_{ball}, d) \quad (1)$$

で与えられる。(1) を解くことで状態 χ_1 が得られる。

(II) はボールがバットに衝突してから接触時間 Δt 間における運動方程式である。ボールがバットの表面に触れた瞬間、非弾性衝突により、浸透度 λ [3] を用いる

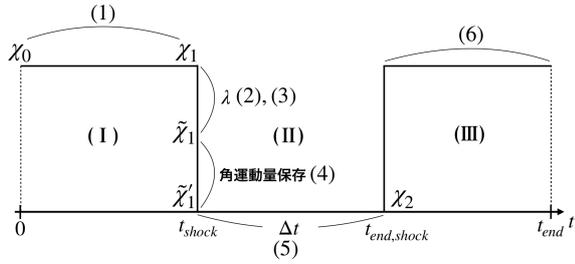


Fig. 1: State of ball trajectory

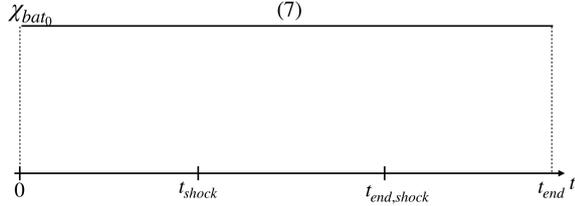


Fig. 2: State of swing trajectory

ことで初期状態 $\tilde{\chi}_1$ は

$$\lambda = f(\chi_1, d, m_{ball}, r_b, r_{b_l}, I_{ball}, I_{bat}) \quad (2)$$

$$\tilde{\chi}_1 = g(\chi_1, \lambda) \quad (3)$$

を解くことで得られる。また、角運動量保存によりボールの状態 $\tilde{\chi}_1'$ は

$$\tilde{\chi}_1' = h(\tilde{\chi}_1, \lambda) \quad (4)$$

を解くことで得られる。ここで、ボールがバットに触れた時間を t_{shock} 、バットから離れた時間を $t_{shock,end} = t_{shock} + \Delta t$ とすると、接触時間 Δt 間におけるボール軌道の運動方程式は

$$\ddot{\vec{p}} = \mathcal{G}(\tilde{\chi}_1', m_{ball}, d, \vec{F}, e, e_F) \quad (5)$$

で与えられる。

(III) は衝突したボールがバットから離れてから t_{end} までの運動方程式である。この運動方程式のボールの初期状態をバットから離れた瞬間のボールの状態 χ_2 とすると、ボール軌道の運動方程式は

$$\ddot{\vec{p}} = \mathcal{F}(\chi_2, m_{ball}, d) \quad (6)$$

で与えられる。

一方で Fig. 2 のようにスイング軌道の運動方程式は一定である。バットの回転行列 $R \in \text{SO}(3)$ とすると、打者のスイング軌道の運動方程式はバットの初期状態 $\chi_{bat0} = [\omega_{bat0}, \vec{v}_{bat0}, \theta_{bat0}, \phi_{bat0}, \theta_{rot0}, \phi_{rot0}, \vec{p}_{bat0}]$ を用いて

$$\dot{R} = p(\chi_{bat0}, t_s) \quad (7)$$

で与えられる。モデルの詳細は [3, 4] を参照されたい。

Table 1: Parameters of the simulation of the pitcher-batter system.

説明	変数	値
ボールの質量	m_{ball} (kg)	145×10^{-3}
ボールの直径	d (m)	7.3×10^{-2}
バットの質量	m_{bat} (kg)	860×10^{-3}
バット短軸の半径	r_b (m)	3.3×10^{-2}
バット長軸の直径	r_{b_l} (m)	84×10^{-2}
ボールとバットの接触時間	Δt (s)	1.0×10^{-3}
反発係数	e	0.4
摩擦係数	e_F	0.25
ボールの慣性テンソル	I_{ball}	
バットの慣性テンソル	I_{bat}	

Table 2: Initial values and parameters that determine the pitch and swing trajectory

説明	変数
投球軌道の初期値	
初速度 (ボール)	v_0 (m/s)
ボール回転数	N_0 (rps)
ボール方向の偏角	θ_{v_0} ($^\circ$)
ボール方向の偏角	ϕ_{v_0} ($^\circ$)
ボール回転軸の偏角	$\theta_{\omega_{r_0}}$ ($^\circ$)
ボール回転軸の偏角	$\phi_{\omega_{r_0}}$ ($^\circ$)
ボールの初期位置	$\vec{p}_{ball0} = [x y z]^T \in \mathbb{R}^3$ (m)
スイング軌道の初期値	
角速度 (バット)	$\vec{\omega}_{bat0}$ (rad/s)
バットの並進速度	$\vec{v}_{bat0} = [v_{bat_x} v_{bat_y} v_{bat_z}]^T \in \mathbb{R}^3$ (m/s)
バット初期姿勢の偏角	θ_{bat0} ($^\circ$)
バット初期姿勢の偏角	ϕ_{bat0} ($^\circ$)
バット回転軸の偏角	θ_{rot0} ($^\circ$)
バット回転軸の偏角	ϕ_{rot0} ($^\circ$)
バットの初期位置	$\vec{p}_{bat0} = [x y z]^T \in \mathbb{R}^3$ (m)
パラメータ	
スイング開始時間	t_s (s)
打者が加える衝撃力	\vec{F} (N)

上記の微分方程式を解くために必要なパラメータと初期値を Table. 1, 2 に示す。Table. 1 には既知のパラメータが含まれており、これらはシミュレーションを行う際には、既に固定された値である。一方で、Table. 2 には未知の値が含まれており、これらの値は実験で測定する必要がある。そのために、次の環境、方法で実験検証を行う。

3 実験検証

3.1 実験環境

本実験は、実際の打球軌道とシミュレーション軌道と比較し、モデルの妥当性を検証することを目的とする。そのため、カメラとセンサを使用して打球軌道のデータに加え、モデルの初期値を決定するために球速、回転数、リリースポイント、投げ出し角度などの投球データやバットスピード、スイング角度などのスイングデータを計測する。したがって Fig. 3 のような実験環境で実施した。富山大学工学部棟グラウンド (縦 80m ×

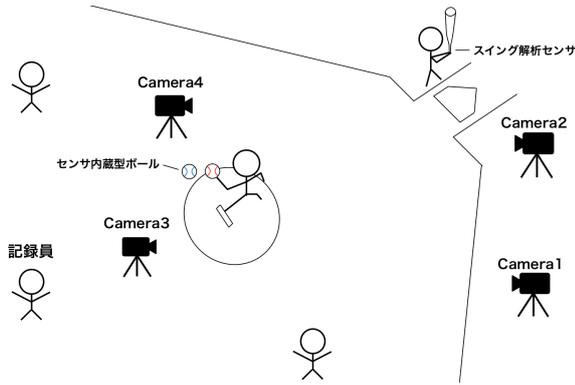


Fig. 3: Experiment Environment

Table 3: Position and function of cameras

Camera	Position	Function
1	打者の正面かつ投手-打者の 中間から 30m 離れた地点	打球の全体軌道
2	打者の正面から 5m 離れた地点	スイング軌道
3	投手後方 3m 地点	リリースポイント (y 軸), 投げ出し角度
4	投手側面 3m 地点	リリースポイント (x 軸), 投げ出し角度

横 90m) において、投手 1 名、打者 1 名、カメラ補佐 4 名、守備兼飛距離計測員 6 名の計 12 名で実施した。打球軌道およびモデルの初期値を決定する投球、打球データを測定するために Table. 3 のように 4 台のカメラ (Camera 1-4) を設置した。

また、投球初期値を決定するために Fig. 4 に示すセンサ内蔵型ボール (MA-Q, ミズノ社製) を使用した。12 軸センサを内蔵しており、これを投球することで、モデルの投球初期値である初速度、回転数、回転軸 (投手視点)、回転軸 (真上視点) を計測する。次に、打撃初期値を決定するために Fig. 5 に示すスイング解析センサ (BLAST 社製) を使用した。バットのグリップエンドに装着して打撃を行うことで、モデルの打撃パラメータであるスイングスピード、スイング軌道を計測する。

実験にはこの 2 つのセンサに加えて、硬式野球ボール (直径: 73mm, 質量: 145g), 硬式用木製バット (League Champ Bamboo, エスエスケイ社製, 竹製, 長さ: 0.84m, 質量: 0.9kg) を使用して測定を行なった。

センサ内蔵型ボールは耐久性の都合上、バットで直接打撃することが出来ないため、打撃をする際は硬式野球ボールに変更する必要がある。したがって、事前に投手が投げるボールのデータをセンサ内蔵型ボールで取得し、実験を行う際はボールを硬式野球ボールに変更した上で打撃を行う必要がある。それを踏まえて次の手順で実験を進める。



Fig. 4: MA-Q



Fig. 5: BLAST

3.2 実験手順

あらかじめ、大学野球経験のある投手がセンサ内蔵型ボールを約 10 球投球し、球速、回転軸、回転数のデータを取得する。測定したデータを打撃実験時の投球の初期値として使用するために、投手は事前に測定した時と同様のフォームで投球して実験を行う。手順は以下の通りである。

1. スマートフォンのカメラをスローモード機能に設定し、4 台のカメラ全ての撮影を開始する。
2. 投手は事前に計測した投球と同様な投球をする。
3. 打者はスイング解析センサを装着したバットで打撃する。
4. ボールが落下した地点を記録員がメジャーを用いて測定。

1 から 4 までの手順で 1 つの打球データが取得でき、これを複数回繰り返すことでデータを収集する。

4 実験結果

4.1 投球初期値の決定

投手がセンサー内蔵型ボールで投球した結果を Table. 4 に示す。ここで、ボールの回転軸は投手視点角

Table 4: Measurement data of 12 pitches thrown

球数	球速	回転数	投手視点	真上視点
	v_0 (km/h)	N_0 (rpm)	角度 $\phi_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$ ($^{\circ}$)	角度 $\theta_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$ ($^{\circ}$)
1 球目	112.5	1625	-25	-27
2 球目	106.5	1537	-19	-27
3 球目	106.9	1467	-30	-4
4 球目	108.9	1521	-33	-23
5 球目	100.9	1428	-28	-17
6 球目	107.6	1487	-24	-17
7 球目	102.1	1436	-26	-23
8 球目	105.9	1366	-14	-8
9 球目	99.1	1351	-35	-16
10 球目	101.8	1369	-16	-11
11 球目	101.2	1355	-25	-28
12 球目	100.0	1339	-27	-18
平均値	104.5	1440.1	-25.2	-18.3
標準偏差	4.0	86.2	6.1	7.4

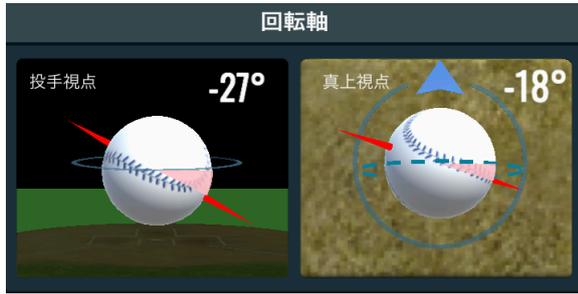


Fig. 6: Definition of MA-Q axis of rotation

度と真上視点角度によって決定される。Fig. 6 のように、投手視点角度は投手からボールを見たとき、水平を 0° として反時計回りを正と定義したもので、真上視点角度は真上からボールを見たとき、水平を 0° として反時計回りを正と定義したものである。また、センサで測定することができる4つ投球データ v_0 , N_0 , $\theta_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$, $\phi_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$ はモデルにそのまま入力することができる。

投手には 100 km/h のボールを投球するように要求し、12 球の投球データを測定した。その結果、球速の平均値は 104.5 km/h に対して、標準偏差は 4.0 km/h であり、回転数の平均値は 1440.1 rpm に対して、標準偏差は 86.2 rpm でありどちらも比較的ばらつきが少ないと言える。一方で、投手視点角度の平均値は -25.2° に対して、標準偏差は 6.1° であり、真上視点角度の平均値は -18.3° に対して、標準偏差は 7.4° であり比較的ばらつきがある結果となった。ただし、実験ではこれらの平均値をもつボールが投球されたと仮定して測定した。シミュレーションにおける投球パラメータを Table. 5 のように決定した。リリースポイント、投げ出し角度は Camera 3,4 で推定して決定している。投球によって少しばらつきはあるが誤差だと判断し、今回のシミュレーションでは全て同様の投球パラメータに設定した。

Table 5: Initial values for model pitching

	リリースポイント	投げ出し角度		球速	回転数	ボールの回転軸	
	p_{ball0} (m)	θ_{v0} ($^{\circ}$)	ϕ_{v0} ($^{\circ}$)	v_0 (km/h)	N_0 (rpm)	$\theta_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$ ($^{\circ}$)	$\phi_{\omega_{n0}}^{\rightarrow}$ ($^{\circ}$)
1~7 回目	[17.04, 0.3, 1.7]	3.0	1.6	104.5	1440.1	-18.3	-25.2

Table 6: Swing data for each batted ball

	バットスピード	アッパー角度
	S_b (m/s)	($^{\circ}$)
1 回目	20.3	13
2 回目	20.8	18
3 回目	22.0	10
4 回目	20.2	8
5 回目	24.5	12
6 回目	24.4	16
7 回目	24.6	13

4.2 打球初期値の決定

今回行った実験では、ボールとバットが衝突した内、打球角度が 0° 以下の軌道（ゴロのような打球）を除いた7回を計測した。Table. 6 に打球ごとのスイングデータを示す。このスイングデータは打撃パラメータとしてそのままモデルに入力することが出来ないため、変換して入力する必要がある。

Table. 6 のスイングデータと Camera 2 で撮影したデータをもとに設定したシミュレーションの打撃パラメータを Table. 7 に示す。

バットの並進速度と角速度は、Fig. 7 のように打者のスイングを上から見たとき、計測データのバットスピードを S_b 、バットの末端から芯までの距離を $r_c = 0.7$ m、インパクト時におけるバットの並進速度 \vec{v}_{bat0} 、バットの角速度 $\vec{\omega}_{bat0}$ とすると、

$$S_b - \|\vec{v}_{bat0}\| = r_c \|\vec{\omega}_{bat0}\| \quad (8)$$

が成り立つ。 \vec{v}_{bat0} をバットスピードに応じた適当な値に決めることで $\|\vec{\omega}_{bat0}\|$ を決定している。

バットの初期姿勢を決める θ_{bat0} , ϕ_{bat0} とバットの回転軸を決める θ_{rot0} , ϕ_{rot0} に関してはスイング軌道を決定する初期値だが、実際のスイング軌道をこのパラメータで完全に再現することは困難であるため、カメラで撮影したスイング軌道とシミュレーションのスイング軌道を目視で比較し、2つの軌道が概ね一致するように初期値を設定した。

スイング開始時間 t_s は実験で測定した打球方向と一致するように手動で調整した。バットの初期位置 \vec{p}_{bat0} も同様に、測定した打球の最高到達点と一致するように手動で調整した。

インパクト時に打者がボールに作用させる衝撃力 $\|\vec{F}\|$ については、打者が加える力に関する研究 [8]-[11] を参考に、実験で測定したスイングスピードに応じて 2000~2500 N の範囲で設定した。

Table 7: Initial values and parameters for model batting

	\vec{v}_{bat_0} (m/s)	$\ \vec{\omega}_{bat_0}\ $ (rad/s)	θ_{bat_0} (°)	ϕ_{bat_0} (°)	θ_{rot_0} (°)	ϕ_{rot_0} (°)	t_s (s)	\vec{p}_{bat_0} (m)	$\ \vec{F}\ $ (N)
1回目	[8, 0, 3]	16.8	120	30	-90	-70	0.455	[0, -0.58 1.077]	2000
2回目	[8, 0, 3]	17.6	120	30	-90	-70	0.465	[0, -0.58 1.088]	2000
3回目	[8.5, 0, 3]	18.6	120	30	-90	-70	0.509	[0, -0.58 1.0415]	2000
4回目	[8, 0, 3]	16.7	120	30	-90	-60	0.495	[0, -0.58 1.232]	2000
5回目	[10, 0, 1.5]	20.6	120	30	-90	-65	0.486	[0, -0.58 1.1665]	2500
6回目	[10, 0, 1.5]	20.4	120	30	-90	-70	0.478	[0, -0.58 1.0655]	2500
7回目	[10, 0, 1.5]	20.9	120	30	-90	-70	0.485	[0, -0.58 1.085]	2500

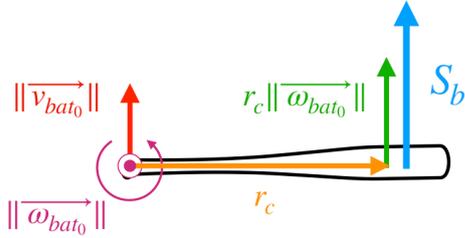


Fig. 7: Relationship between bat speed S_b , translational velocity $\|\vec{v}_{bat_0}\|$, angular velocity $\|\vec{\omega}_{bat_0}\|$, and r_c .

4.3 実験とシミュレーションの打球軌道比較

Table. 7 に示す打撃パラメータと初期値に基づくシミュレーション結果と実験データの飛距離の比較した結果を Table. 8 に示す。また、実験データとシミュレーションの打球の落下点を比較した結果を Fig. 8 に示す。Table. 8 の誤差率は、ホームベースの末端から打球の落下点までの距離を表す絶対距離を比較したものである。1回目、3回目、および6回目は誤差率が2.5%以内に収まり精度が高く実際の打球を模擬できた。一方で、その他の打球は誤差率が10%前後という結果になり、少しばらつきが生じた。原因としては、撮影した動画から打球の最高到達点を正確に測定することが困難であり、正確な値を決定することが出来なかったことが挙げられる。また、4回目の紫線は実際の打球よりもシミュレーションの打球の方が飛距離が大きい結果となった。この打撃の際、他の打撃よりもバットの先端にボールが衝突し、バットが大きく振動した。したがって、バットの振動により打球に伝わるエネルギーの損失が生じた可能性があるが、現在のモデルではバットの振動を考慮していないため、この要因が結果に差を生じさせたと考えられる。

本実験では、打球方向や最高到達点をシミュレーション軌道と一致させるために、スイング開始時間やバットの初期位置などの打撃パラメータ、初期値を手動で調整した。一方で、他の打撃パラメータについては実験データや文献に基づき適切な値に設定した。したがって、誤差率が約10%以内に収まっていることは、このモデルの妥当性が十分にあることを示唆している。

Table 8: Comparison of experimental data and simulation results

	実験				シミュレーション			距離誤差率 (%)	
	飛距離			最高到達点 (m)	飛距離		最高到達点 (m)		
	x 軸	y 軸	絶対距離		x 軸	y 軸			絶対距離
1回目	44.0	-28.6	52.7	10	43.6	-27.3	51.5	10.7	1.9
2回目	40.8	-20.4	45.6	4.5	36.5	-20.1	41.7	5.2	8.6
3回目	34.8	2.6	34.9	20	35.0	2.8	35.1	19.9	0.6
4回目	42.9	11.0	44.3	8	49.3	13.5	51.1	8.0	15.3
5回目	61.9	-26.4	67.3	10	55.5	-23.9	60.4	9.9	10.2
6回目	44.9	-37.2	58.3	15	46.9	-37.1	59.8	15.6	2.5
7回目	44.3	-26.8	51.8	5	47.2	-26	47.2	5.1	8.8

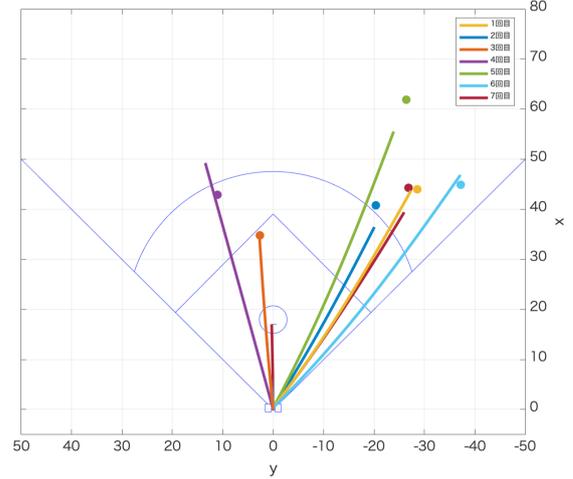


Fig. 8: Comparison of simulation results and experimental fallout points

5 おわりに

本研究では、実験検証を通じて提案モデルにおける実際の打球軌道とシミュレーション軌道を比較し、モデルの妥当性を検証した。提案モデルの打球およびスイング軌道を決定する運動方程式について簡単に記述し、この運動方程式を解くために必要なパラメータと初期値を示した。これらを既知パラメータと未知の初期値に区別し、未知のボールとバットの初期状態および実際の打球軌道を測定するために構築した実験環境と実験手順についても詳細に説明した。

測定した投球データはボールの初期状態として直接モデルに代入してシミュレーションを行った。一方で、打撃データは直接代入できないため、可能な限り変換して入力した上、その他は実際の軌道と一致するように手動で調整を行った。

最後に、決定したボールとバットの初期状態を用いてシミュレーションを行い、結果と打球軌道の飛距離を比較し、絶対距離の誤差率をもとに結果を考察した。初期状態を適切に設定し、調整することで提案モデルが実際の打球軌道を再現できる可能性を議論した。

ただし、使用した一般的なカメラでは打球の弾道や高度など、正確な軌道を測定することが困難である。ま

た、打撃のデータからバットの初期状態への変換方法が不確かな部分があり、調整が必要な箇所もある。そのため、今後の展望として、正確な打球データを測定するために、カメラの性能、設置位置、台数などの実験環境を改善し、打撃のデータからバットの初期状態への変換方法を見直して、より適切な初期値を設定することで、正確な実験検証を行うことができ、提案モデルの改善の余地を詳細に検証することができる。

謝辞

本研究の実施にあたり、硬式野球経験者としてご協力をいただいた富山大学大学院 動的システム・ロボティクス研究室の秋山寛太氏をはじめ、同研究室の学生の皆様に感謝の意を評します。

秋山氏には、貴重な野球経験と専門的な知識を提供いただき、実験の進行において大変な助けとなりました。また、同研究室の学生の皆様の熱意あるサポートにより、実験のスムーズな進行が可能になりました。

この場を借りて、ご協力いただいた方々に心から感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 長島, 清原, 高橋: 野球場における防球ネット高さの解析; 東北学院工学部研究報告, Vol. 54, No. 1, pp. 1-11 (2020)
- [2] 宮澤, 志村, 城所, 若原, 矢内: 野球のバッティングにおけるインパクトシミュレーション; 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 77, No. 777, pp. 813-822 (2011)
- [3] 味岡, Nguyen, 平田: 野球打撃のインパクト時における打者が加える衝撃力およびボールの角運動量保存を考慮した 3 次元軌道解析; 自動制御連合講演会論文集, Vol. 66, pp. 1113-1118 (2023)
- [4] 味岡, Nguyen, 平田: 弾性衝突とエネルギー保存の原理を用いたボールとバットの 衝撃相互作用および 3 次元軌道モデリング; 自動制御連合講演会論文集, Vol. 65, pp. 1392-1399 (2022)
- [5] 城所, 若原, 矢内: 野球のバッティングにおける打球の運動エネルギーを決定するスイングとインパクト; バイオメカニクス研究, Vol. 16, pp. 220-230 (2012)
- [6] 中島, 森下, 八木, 桜井: 野球の打撃におけるインパクト時のバットの上下方向の傾斜が打球の回転に及ぼす影響; バイオメカニクス研究, Vol. 24, pp. 8-18 (2020)

- [7] https://baseballsavant.mlb.com/statcast_leaderboard
- [8] 大野: 各種飛翔体の衝突時の衝撃力に関する試験; 防衛大学校研究報告書, Vol. 1, pp. 1-7 (2010)
- [9] 自転車産業振興協会 研究指導部: 続々・自転車が衝突するときー衝撃力の大きさ; 技研ニュース, No. 174, pp. 2 (2000)
- [10] Shenoy M M, Smith L V, Axtell J T: Performance assessment of wood, metal and composite baseball bats; *Composite Structures*, Vol. 52, pp. 397-404 (2001)
- [11] Daniel A. Russell: Physics of Baseball and Softball Bats; <https://www.acs.psu.edu/drussell/bats.html>